Svolgimento Es 1

X insieme, $\emptyset \neq Y \subsetneq X$ sottoins., Z insieme

$$Z^X := \{ f : X \longrightarrow Z \}$$ tutte le applicazioni da X a Z.

Relazione su Z^X: $f, g \in Z^X$ t.c. $f \sim g \iff f|_Y = g|_Y$
i.e. $f(y) = g(y), \forall y \in Y$

(i) $\sim$ rel. equivalenza su Z^X

$f \sim f$ ovvio perché $f|_X = f|_X \implies f|_Y = f|_Y$

$f \sim g \implies g \sim f$ ovvio $f|_Y = g|_Y \implies g|_Y = f|_Y$

$f \sim g$ e $g \sim h \implies f|_Y = g|_Y = h|_Y \implies f \sim h$ ovvio

(ii) Definire $Z^X/\sim$

Due $f, g \in Z^X$ sono $\sim$-equivalenti se coincidono su Y

Perciò
$$[f] = [g] \iff f \sim g \iff f|_Y = g|_Y \iff f(y) = g(y) \ \forall y \in Y$$

Perciò ogni classe di equivalenza è individuata esclusivamente dai valori che $f \in Z^X$ assume sul sottoins. Y $\implies$

$$\boxed{Z^X/\sim \ \underset{\text{identificato}}{\equiv} \ Z^Y = \{ f : Y \longrightarrow Z \}}$$

(iii) Considero $\forall a \in Y$ e prendo $(Z, =)$ rel. d'ordine parziale

$$\boxed{\begin{array}{rl} ev_a : & Z^X \longrightarrow Z \\ & f \longmapsto ev_a(f) := f(a) \end{array}}$$

ev_a = valutazione in $a \in Y$

ev_a applicazione di insiemi è compatibile con relazione $\sim$ su Z^X e con $=$ Z? Cioè $\exists !\ \overline{ev_a} : \left(Z^X/\sim \right) \longrightarrow Z$ t.c.

$$\begin{tikzcd} Z^X \arrow[rr, "ev_a"] \arrow[dr, "\pi_\sim"'] & & Z \\ & Z^X/\sim \arrow[ur, "\overline{ev_a}"'] & \end{tikzcd}$$

diagramma sia commutativo, i.e. $\boxed{ev_a = \overline{ev_a} \circ \pi_\sim}$?

che vuol dire che ev_a fattorizza al quoziente con proiez canonica $\pi_\sim$?

Poiché $a \in Y$

se $f \sim g$ in Z^X $\Leftrightarrow$ $f(y)=g(y), \ \forall y \in Y$.

In particolare, $f(a) = g(a) \Leftrightarrow ev_a(f) = ev_a(g)$

$\Rightarrow$ ev_a è compatibile $(Z^X, \sim) \longrightarrow (Z, =)$.

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \pi_\sim : Z^X &\twoheadrightarrow \left(Z^X/\sim \right) \\ f &\longmapsto [f] = \{ g \in Z^X \mid g \sim f \text{ in } Z^X \} \end{aligned}$$

Poiché $\forall f, g \in [f]$, $\underline{ev_a(f) = ev_a(g)}$ perché $a \in Y$, in particolare ev_a è costante sulle classi di equivalenza, i.e.

$$ev_a(g) = g(a) = f(a) = ev_a(f), \ \forall g \in [f]$$

$\Rightarrow$ $\exists$ applicazione ben definita, denotata con:

$$\begin{aligned} \overline{ev_a} : Z^X/\sim &\longrightarrow Z \\ [f] &\longmapsto f(a) = ev_a(f) = ev_a(g), \ \forall g \in [f] \end{aligned}$$

proprio perché ev_a è <u>indip. dal rappresentante di una classe</u>

- Abbiamo

$$\begin{tikzcd} f \in Z^X \arrow[rr, "ev_a"] \arrow[dr, "\pi_\sim"] & & Z \\ & Z^X/\sim \arrow[ur, "\overline{ev_a}"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[rr, mapsto, bend left, "ev_a"] \arrow[d, mapsto, "\pi_\sim"] & & f(a) \\ {[f]} \arrow[urr, mapsto, bend right, "\overline{ev_a}"] & & \end{tikzcd}$$

* $\overline{ev_a}$ è un'applicazione che <u>fa commutare diagramma</u> i.e. per cui:

$$\boxed{ev_a = \overline{ev_a} \circ \pi_\sim} \quad (*)$$

* <u>Essa è unica a soddisfare $(*)$</u>

Se infatti esiste $\Phi : \left(Z^X/\sim \right) \longrightarrow Z$ per cui $ev_a = \Phi \circ \pi_\sim$,

allora $\forall f \in Z^X$ deve valere:

$$ev_a(f) = f(a)$$
$$\parallel$$
$$(\Phi \circ \pi_\sim)(f) = \Phi(\pi_\sim(f)) = \Phi([f])$$

$$\Rightarrow \Phi([f]) = f(a), \quad \forall\, [f] \in Z^X/\sim$$

Ma allora $\Phi \equiv \overline{ev_a}$, per come è stata definita $\overline{ev_a} \Rightarrow \overline{ev_a}$ unica a soddisfare (*)

(iv) Se invece $a \notin Y$

ev_a NON conserva relazione $\sim$ su Z^X e $=$ su Z perché

- $a \notin Y$ e quindi

(a) possono $\exists\ f \sim g$ in Z^X t.c. $f(a) \neq g(a)$ (ammissibile per $\sim$)

$\Rightarrow ev_a(f) \neq ev_a(g)$ pure se $f \sim g$ in Z^X

(b) possono $\exists\ f \not\sim g$ in Z^X, cioè $[f] \neq [g]$, i.e.

$\exists\ y_0 \in Y$ t.c. $f(y_0) \neq g(y_0)$ ma t.c. $f(a) = g(a)$ per il

fissato $a \notin Y \Rightarrow ev_a(f) = ev_a(g)$ anche se $f \not\sim g$

Dunque $\nexists$ nessuna applicazione che fattorizzi ev_a al quoziente

(v) Se $X = Z = \mathbb{R}$ e $Y = [0,1]$ cosa si può dire

di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim$ e delle applicazioni

$(ev_{(-1)})^2, \quad ev_{(1)} + ev_{(-1)}, \quad ev_{(0)} \cdot ev_{(1)}$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/\sim \;\equiv\; \mathbb{R}^{[0,1]}$$

- $(ev_{(-1)})^2(f) = (ev_{-1} \cdot ev_{-1})(f) = (f(-1))^2$ non passa quoz., $-1 \notin [0,1]$
- $(ev_{-1} + ev_1)(f) = f(-1) + f(1)$ " " " $-1 \notin [0,1]$
- $(ev_0 \cdot ev_1)(f) = f(0) \cdot f(1)$ passa al quoziente perché $0, 1 \in [0,1]$

Svolgimento Es. 2

(i) $X = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $x, y \in X$ t.c. $x \sim y \iff |x| = |y|$

è sempre di equivalenza

Se $X = \mathbb{Z}$

- le classi sono

$$[0] = \{0\}$$
$$[n] = \{n, -n\} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- $\boxed{\mathbb{Z}/\sim\ \equiv \mathbb{N}}$ $\quad [n]$ rappresentato da $n \in \mathbb{N}$

Se $X = \mathbb{R}$

- le classi sono

$$[0] = \{0\}$$
$$[r] = \{r, -r\}, \quad \forall\ r \in \mathbb{R}_{>0} = (0, +\infty)$$

- $\boxed{\mathbb{R}/\sim\ \equiv \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)}$ $\quad [r]$ rappresentato da $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Se $X = \mathbb{C}$

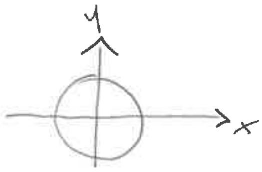
- le classi sono

$$[0] = \{0\}$$
$$[z] = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| = |z| \}$$

Ora se $z \neq 0 \implies |z| > 0$, i.e. $|z| \in \mathbb{R}_{>0}$

Sia $|z| := \rho \in \mathbb{R}_{>0}$, allora

$$[z] = \{ w = \rho \cdot e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi \} \equiv S^1_\rho \subset \mathbb{R}^2$$



Circonferenza di raggio ρ e centro $O = (0,0)$

Piano Argand Gauss

- $\boxed{\mathbb{C}/\sim\ \equiv \{0, \rho \in \mathbb{R}_{>0}\} = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}}$

$[z]$ = rappresentata dal raggio ρ della circonferenza su cui deve giacere

($\rho = 0$ è solo 0 che fa classe a sé)

(ii) $X = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $x \sim y \iff x^2 = y^2$

è ovviamente rel. di equivalenza in tutti i casi

- Se $X = \mathbb{Z}$

  $y, x \in \mathbb{Z}$ sono equiv. $\iff y = \pm x$ o $y = 0$ se $x = 0$

  quindi discorso invariato rispetto a $|\ |$ del caso precedente

- Se $X = \mathbb{R}$

  stesso discorso $\to$ si comporta come $|\ |$ del caso precedente

- Se $X = \mathbb{C}$

  - Se $\underline{z} = 0$ $\quad [\underline{0}] = \{\underline{0}\}$ fa classe a sé
  - Se $\underline{z} \neq 0$ $\quad [\underline{z}] = \{+\underline{z}, -\underline{z}\}$

Pertanto abbiamo che

$[\underline{0}]$ fa classe a sé ed è $[\underline{0}] = \{\underline{0}\}$

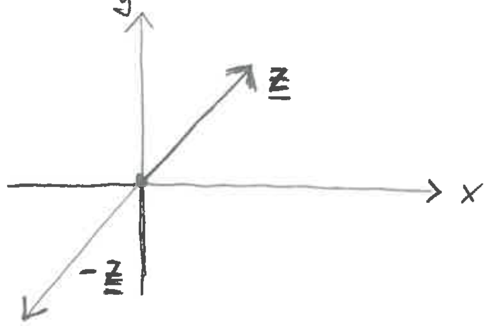
Invece, $\forall\ \underline{z} \in \mathbb{C} \setminus \{\underline{0}\}$, sappiamo che, data T indet. su $\mathbb{C}$

$T^2 - \underline{z}^2 \in \mathbb{C}[T]$ polinomio monico

ha 2 radici distinte $\forall\ \underline{z} \in \mathbb{C} \setminus \{\underline{0}\}$ che sono

$$[\underline{z}] = \{+\underline{z}, -\underline{z}\}$$

Se vedo nel piano di Argand - Gauss



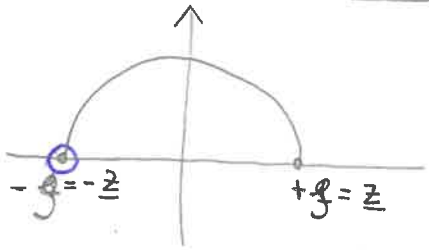
Pertanto fissato un $|\underline{z}| = \rho \in \mathbb{R}_+$, sto prendendo

tutti i punti su $S^1_\rho = \{\underline{z} \in \mathbb{C} \mid |\underline{z}| = \rho\}$ e sto

identificando $\underline{z}$ con $-\underline{z}$ (identificazione antipodale)

③

Per calcolarmi le classi fissato ρ $\Rightarrow$ posso ricondurmi ai rappresentanti di una calotta di S^1_ρ ad esempio



$S^1_{+,\rho}$ = calotta superiore

Ma $\{z=\rho,\ z=-\rho\}$ vanno ancora identificati $\rightsquigarrow$

ritrovo una S^1 opportuna

• In modo formale

$(G=\{1,-1\},\cdot)$ su $z=\rho\cdot e^{i\theta}$ come agisce G su S^1_ρ?

$\downarrow$ gruppo di ordine 2

$$1\cdot z = z \Rightarrow 1\cdot \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\theta},$$

$$-1\cdot z = -z \Rightarrow -1\cdot \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+\pi)}$$

$\Rightarrow$ l'insieme che rappresenta le classi fissato ρ è:

$$= \{\rho e^{i\theta} \mid 0\leq\theta<\pi\} = S^1_{+,\rho}\setminus\{-\rho\}$$

$$z \xrightarrow{1-1} z^2 \qquad w \to +\sqrt{w}$$

$\updownarrow$ 1 - 1 corrisp. biunivoca

$$S^1_{\rho^2} = \{\rho^2\cdot e^{i2\theta} \mid 0\leq 2\theta<2\pi\}$$ parametrizzazione iniettiva di $S^1_{\rho^2}$

$$S^1_{\rho^2} \xleftrightarrow{1-1} S^1_1$$ dividendo per ρ^2

Perciò

$$\boxed{\mathbb{C}/\sim \;= \{0\}\,\dot\cup\,\{\underbrace{S^1_1}_{\text{punti su una } S^1_{1}}\times\underbrace{\mathbb{R}_{>0}}_{\text{raggi } \rho}\}}$$

(iii) $X = \mathbb{Z}$ e

$m \sim n \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ per cui $m = 2^k \cdot n$

riflessiva $\quad m = 2^0 m \quad$ ok

simmetrica $\quad m = 2^k \cdot n \implies n = 2^{-k} \cdot m \quad$ ok

transitiva $\quad m = 2^k \cdot n,\ n = 2^h \cdot m \implies n = 2^{k+h} \cdot n$

È di equivalenza su $\mathbb{Z}$

. Classi

Poichè $k \in \mathbb{Z}$, dobbiamo assicurarci quando $2^k \cdot m \in \mathbb{Z}$, con $m \in \mathbb{Z}$

$$2^k \cdot m \in \mathbb{Z} \iff \begin{cases} \text{o } k \geq 0 \\ \text{oppure se } k < 0 \implies 2^{-k} \mid n \text{ in } \mathbb{Z} \end{cases}$$

Notiamo dunque che

- $m \sim n \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ t c $m = 2^k \cdot n$
  $\implies$ m e n stesso segno

- $\forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ si può scrivere in modo unico come

$$\boxed{n = 2^{\nu_2(n)} \cdot d} \quad \text{dove}$$

$\nu_2(n)$ = valutazione 2-adica di n

e $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dispari

(fatt. unica, d prodotto di tutti i primi dispari di n nella sua fatt.)

* Preso $d \in \mathbb{Z}_+$ dispari $\implies$

$$[d] = \{d, 2d, 4d, 8d, \ldots, 2^k d, \ldots\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Infatti:

Sia $n = 2^k \cdot d$, $k > 0$ $\implies d \sim 2^k d = n$ visto che $\begin{cases} 2^k \mid n \text{ in } \mathbb{Z} \\ d = \frac{n}{2^k} = 2^{-k} \cdot n \end{cases}$

Sia $m = 2^h \cdot d$, $h > 0$ $\implies m = 2^h \cdot d \sim d$ visto che $m = 2^h \cdot (d)$ per $h > 0$

$\implies m \sim n$ per transitività !!

Pertanto, $\forall\, d \in \mathbb{Z}$ dispari

$$[d] = \{ 2^k \cdot d \}_{k \in \mathbb{N}}$$

- Siccome ogni $m \in \mathbb{N}$ si scrive in modo unico

$$\boxed{m = 2^{v_2(m)} \cdot d \ , \quad d \text{ dispari}}$$

con $v_2(m) \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $m \in [d]$, ma in classe $[d]$ ci sono

anche tutti i $2^h d$, $0 \leq h < v_2(m)$ e tutti i $2^k \cdot d$, $k > v_2(m)$

$\Rightarrow$

$$\boxed{[m] = [d]}$$

- Siccome il segno è rispettato

$m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow [m] = [+d]$

$m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, i.e. $m < 0 \Rightarrow d < 0$ e $\underset{[m]}{\underset{\|}{[-|m|]}} = \underset{[d]}{\underset{\|}{[-|d|]}}$

Pertanto

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{Z}/\sim &= \underset{\text{Classe di } 0}{\{0\}} \,\dot\cup\, \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots\} \\ &= \{0\} \,\dot\cup\, (\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) \end{aligned}}$$

Svolgimento Esercizio 3

(i) $(G,\circ)$ gruppo e X insieme

Azione di G su X: applicazione

$$*: G\times X \longrightarrow X \qquad \forall g\in G, \forall x\in X$$
$$(g,x) \longrightarrow g*x$$

t.c. • $Id_G * x = x \quad \forall x\in X$

• $(g\circ h)*x = g*(h*x), \forall x\in X$

$(G,\circ)$ induce relazione di equivalenza su X

$$\boxed{x \underset{G}{\sim} y \text{ in } X \iff \exists\, g\in G \text{ t.c. } y=g*x}$$

• riflessiva

$x \underset{G}{\sim} x$ in X visto che $x = Id_G * x, \ \forall x\in X$ ok

• simmetrica

$x\sim_G y \Rightarrow \exists g \mid y = g*x \underset{\substack{G \text{ gruppo}\\ \exists g^{-1}}}{\Rightarrow} g^{-1}*y = g^{-1}*(g*x) \underset{\text{assiomazione}}{=} (g^{-1}\circ g)*x = Id_G * x = x$ ok

• transitiva

$x\sim_G y$ e $y\sim_G z \Rightarrow \exists g \mid y = g*x$ e $\exists h \mid z = h*y \Rightarrow$

$z = h*(g*x) \overset{\text{assioma}*}{=} (h\circ g)*x$ con $h\circ g\in G \Rightarrow x\sim_G z$

• $[x] := \{ y\in X \mid y = g*x, g\in G\}$ = orbita di $x\in X$ sotto azione di G $= \mathcal{O}_G(x)$

(ii) S_5 e $X = X_5 := \{1,2,3,4,5\}$

considero $\sigma := (1,3,5)\circ(2,4)\in S_5$ permutazione

Relazione su X

$i,j\in X$ t.c. $i\sim j \iff \exists\, k\in\mathbb{Z}$ per cui, $j=\sigma^k(i)$ $\Rightarrow$

è relazione di equivalenza

si perché $\{\sigma^k \mid k\in\mathbb{Z}\} = \langle\sigma\rangle$ sotto gruppo in S_n generato da σ

$$\boxed{\sigma = (1,3,5)\circ(2,4)}$$

$\sigma^2 = (1,3,5)\circ(2,4)\circ(1,3,5)\circ(2,4) \underset{\substack{(1,3,5)\text{ e }(2,4)\\ \text{cicli disgiunti}\\ \Rightarrow \text{commutano}}}{=} (1,3,5)\circ(1,3,5)\circ(2,4)\circ(2,4) =$

(2)

$(1,3,5)\circ(1,3,5) = (1,5,3)$
$(2,4)\circ(2,4) = Id_{S_5}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma^2 = (1,5,3) \in \langle\sigma\rangle}$

- $\sigma^3 = \sigma\circ\sigma^2 = [(1,3,5)\circ(2,4)]\circ(1,5,3)$
$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cicli disgiunti commutano}}}{=} (1,3,5)\circ(1,5,3)\circ(2,4) = Id_{S_5}\circ(2,4)$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sigma^2 = (1,5,3) = (1,3,5)^{-1} \in \langle\sigma\rangle \\ \sigma^3 = (2,4) \in \langle\sigma\rangle \end{array}}$

- $\sigma^4 = \sigma\circ\sigma^3 = [(1,3,5)\circ(2,4)]\circ[(2,4)] = (1,3,5) \Rightarrow \boxed{\sigma^4 = (1,3,5) \in \langle\sigma\rangle}$

$\sigma^5 = \sigma^4\circ\sigma = \sigma^2\circ\sigma^3 = [(1,5,3)]\circ[(2,4)] = (2,4)\circ(1,5,3) = \sigma^3\circ\sigma^2$

$\Rightarrow \boxed{\sigma^5 = (1,5,3)\circ(2,4) \in \langle\sigma\rangle}$

$\sigma^6 = \sigma^5\circ\sigma = [(1,5,3)\circ(2,4)]\circ[(1,3,5)\circ(2,4)] =$
$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{cicli disgiunti commutano}}}{=} \underbrace{(1,5,3)\circ(1,3,5)}_{Id_{S_5}}\circ\underbrace{(2,4)\circ(2,4)}_{Id_{S_5}} = Id_{S_5}$

$\boxed{\sigma^6 = Id_{S_5}}$

Pertanto

$\boxed{\langle\sigma\rangle = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \underset{\substack{\parallel \\ Id_{S_5}}}{Id_G}\}}$

(1) Sottogruppo di S_5 perché gruppo, contenuto in S_5, ed è gruppo rispetto dell'operazione ereditata da quella di S_5
(2) sottogruppo ciclico generato da σ

$\Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma^5$, $(\sigma^5)^{-1} = \sigma$
$(\sigma^2)^{-1} = \sigma^4$ e $(\sigma^4)^{-1} = \sigma^2$
$(\sigma^3)^{-1} = \sigma^3$ $\Rightarrow$ ho trovato tutti gli inversi

La relazione $\sim$ è la relazione di azione di

$(G,*) = (\langle\sigma\rangle, \circ) < (S_5, \circ)$ su X e $\boxed{|G| = |\langle\sigma\rangle| = 6}$

- Classi di equivalenza = Orbite di $G=\langle\sigma\rangle$

$[1] = \mathcal{O}_{\langle\sigma\rangle}(1) = \{1,3,5\}$ orbita di 1 per azione di $G=\langle\sigma\rangle$ su X

$[2] = \mathcal{O}_{\langle\sigma\rangle}(2) = \{2,4\}$ orbita di 2 per azione di $G=\langle\sigma\rangle$ su X

- Insieme quoziente

$X/\sim_{\langle\sigma\rangle} = \{[1],[2]\} \Rightarrow \boxed{\left|X/\sim_{\langle\sigma\rangle}\right| = 2}$

$\boxed{\begin{array}{l}|\mathcal{O}_{\langle\sigma\rangle}(1)| = 3\\ |\mathcal{O}_{\langle\sigma\rangle}(2)| = 2\end{array}}$ e $X = \underset{\{1,3,5\}}{[1]} \dot\cup \underset{\{2,4\}}{[2]}$ partizione di X

(iii) $X = \mathbb{C}^m$ $\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ con $z_i, w_j \in \mathbb{C}$
$\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in$ $1\le i,j\le m$

Introduco relazione

$\underline{z} \sim \underline{w} \Leftrightarrow \exists\, \sigma \in S_m$ t.c.
$(w_1, \dots, w_m) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)})$

- $\sim$ è relazione di equivalenza di azione di $G = S_m$ su $\mathbb{C}^m$
permutando le coordinate di vettori di $\mathbb{C}^m$

$* : S_m \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^m$
$(\sigma, (z_1, \dots, z_m)) \longmapsto (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)})$ i.e. $\sim = \sim_{S_m}$

$*$ è banalmente un'azione proprio perché $(S_m, \circ)$ gruppo che opera su $\{1,\dots,m\}$

- $\boxed{[\underline{z}] = \{(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) \mid \sigma \in S_m\} = \mathrm{Orb}_{S_m}(\underline{z})}$

Esempi

$*$ $\underline{0} \in \mathbb{C}^m$ $[\underline{0}] = \{(0,0,\dots,0)\} \Rightarrow |[\underline{0}]| = 1$

$*$ $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $[(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)] = \{(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)\}$ $|[(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)]| = 1$

$*$ Però e.g. $[(2,1,1,\dots,1)] = \{(2,1,\dots,1), (1,2,1,\dots,1), \dots, (1,1,\dots,1,2)\}$
$\downarrow$ cardinalità m

* Invece ad esempio

$$\left|[(1,2,3,-,n)]\right| = n!$$

Le classi o orbite dell'azione di S_n su $\mathbb{C}^n$ non hanno cardinalità costante.

• Dato $\underline{z} = (z_1, -, z_n) \in \mathbb{C}^n$

$|[\underline{z}]|$ = dipende da quanto ogni singolo z_i è ripetuto in $\underline{z}$, i.e. se $\exists\, 1 \le j \neq i \le n$ t.c. $z_j = z_i$

Dato $\underline{z} = (z_1, -, z_n)$ sia

• $j_1 \rightsquigarrow$ indice di z_{j_1} con j_1 minimo per cui z_{j_1} ripetuto m_{j_1} - volte
cioè $\exists$ altri $(m_{j_1} - 1)$ indici maggiori di j_1, detti h, per cui $z_h = z_{j_1}$ in $\underline{z} = (z_1, -, z_{j_1}, ---, z_{j_1}, ---, z_j, ---, z$
indici h

$j_1 < j_2 \rightsquigarrow$ indice di z_{j_2} con j_2 minimo per cui z_{j_2} ripetuto m_{j_2} - volte e $z_{j_1} \neq z_{j_2}$ in $\underline{z}$

$\vdots$

$j_r \rightsquigarrow$ ultimo minimo indice di elementi ripetuti in $\underline{z}$

$$\Rightarrow \boxed{|[\underline{z}]| = \frac{n!}{(m_{j_1}!)(m_{j_2}!)\cdots(m_{j_r}!)} = |\mathcal{O}_{S_n}(\underline{z})|}$$

(iv) Sia

$$P : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}[T] \qquad \underline{z} \longrightarrow P(\underline{z})$$

T indeterminata su $\mathbb{C}$

applicazione t.c

$$\boxed{P(\underline{z}) = P(z_1, \dots, z_m) := \prod_{i=1}^{m} (T - z_i) = q_{P(z_1, \dots, z_m)}(T) \in \mathbb{C}[T]}, \quad z_i \in \mathbb{C}$$

Voglio dimostrare che P è applicazione che conserva relazioni

$$(\mathbb{C}^m, \sim_{S_m}) \quad e \quad (\mathbb{C}[T], =)$$

Infatti

$(w_1, \dots, w_m) \sim_{S_m} (z_1, \dots, z_m) \iff (w_1, \dots, w_m) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)})$ per qualche $\sigma \in S_m$

$$\Rightarrow P(w_1, \dots, w_m) = P(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}) = \prod_{i=1}^{m} (T - z_{\sigma(i)})$$

$$\underset{\substack{\text{riordinamento}\\ \text{dei fattori irriducibili}\\ \text{di } q_{P(z_1,\dots,z_m)}(T) \in \mathbb{C}[T]}}{=} \prod_{i=1}^{m} (T - z_i) = P(z_1, \dots, z_m)$$

$\Rightarrow P$ conserva relazioni $(\mathbb{C}^m, \sim_{S_m}) \xrightarrow{P} (\mathbb{C}[T], =)$

(v) $P : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}[T]$ è applicazione $\Rightarrow$ induce relazione di equivalenza $\sim_P$ su $\mathbb{C}^m$

$$\underline{z} \sim_P \underline{w} \iff P(\underline{z}) = P(\underline{w})$$

i.e. in relazione $\iff$ hanno stessa immagine mediante P

Ora $P(\underline{z}) = \prod_{i=1}^{m} (T - z_i)$

$$\| $$

$$P(\underline{w}) = \prod_{i=1}^{m} (T - w_i)$$

Poiché $(T - z_i)$ e $(T - w_j)$ tutti irriducibili in $\mathbb{C}[T]$

e $(T - z_i) \mid P(\underline{w})$ e $(T - w_j) \mid P(\underline{z})$ in $\mathbb{C}[T]$

$\Rightarrow \exists\, j \in \{1, \dots, m\}$ t.c. $(T - z_i) = (T - w_j)$ e viceversa

$\Rightarrow$ $j = \sigma(i)$ per qualche $\sigma \in S_m$ e $w_j = z_{\sigma(i)}$

$\Rightarrow$ $(T - w_j) = (T - z_{\sigma(i)})$

cioè $\boxed{\sim_P = \sim_{S_m}}$ dove $P : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}[T]$

(vi) Cerco $Y \subset (\mathbb{C}[T], =)$ t.c. (Y, P) rappresenti $\mathbb{C}^m / \sim_{S_m}$

In altre parole cerco $Y \subset \mathbb{C}[T]$ t.c.

$$\mathbb{C}^m \xrightarrow{P} \!\!\!\rightarrow Y \subset \mathbb{C}[T]$$

e $\forall\, q_y(T) \in Y$, $P^{-1}(q_y(T)) = [\underline{z}]_{\sim_{S_m}} = [\underline{z}]_{\sim_P}$ per $\underline{z} \in \mathbb{C}^m$

$\Rightarrow$ gli elementi di Y sono t.c. $Y = \mathrm{Im}(P)$ $\Rightarrow$

$$q_y(T) = P(z_1, \dots, z_m) = \prod_{i=1}^{m} (T - z_i) \quad \text{per qualche } \underline{z} \in \mathbb{C}^m$$

$\Rightarrow$ $\boxed{Y \subseteq \{\text{polinomi monici in } \mathbb{C}[T]\}}$

- Un polinomio monico è della forma

$$q(T) = T^m + a_1 T^{m-1} + \dots + a_{m-1} T + a_m \in \mathbb{C}[T]$$

Per Teorema fondamentale Algebra, $\exists\, z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ (non tutti distinti in generale) per cui

$$q(T) = \prod_{i=1}^{m} (T - z_i) = P(z_1, \dots, z_m), \quad \text{per } \underline{z} \in \mathbb{C}^m$$

$\Rightarrow$ $q(T) \in Y = P(\mathbb{C}^m)$ $\Rightarrow$ $\boxed{Y = \{\text{polinomi monici in } \mathbb{C}[T]\}}$

Verifichiamo che $(Y, =)$ rappresenta $\mathbb{C}^m / \sim_{S_m}$

Discende da (v) dove abbiamo dim. che

$\sim_{S_m} = \sim_P$ cioè $\underline{z} \sim_{S_m} \underline{w} \iff \underline{z} \sim_P \underline{w} \iff P(\underline{z}) = P(\underline{w}) \iff$ $\underline{z}$ e $\underline{w}$ individuano lo stesso polinomio monico di Y

Ma allora

$$\boxed{\mathbb{C}^n/_{\sim S_n} = \mathbb{C}^n/_{\sim p} = Y = \{\text{polinomi monici in } \mathbb{C}[t]\}}$$

(vii) Poiché $\mathbb{C}^n/_{\sim S_n} \equiv Y$ da (vi),

notiamo che

$$\left(Y = \{T^n + a_1 T^{n-1} + a_2 T^{n-2} + \dots + a_{n-1} T + a_n\}, =\right)$$

$$\updownarrow \ \underline{\underline{\text{biunivoca}}}$$

$$\left(\mathbb{C}^n, =\right) \ni (a_1, a_2, \dots, a_n) = \underline{a}$$

Deduciamo che $\boxed{\mathbb{C}^n/_{\sim S_n} \equiv \mathbb{C}^n}$