Svolgimento Esercizio 1

(1) $(\mathbb{N}, \leq)$ totalmente ordinato $\Rightarrow$ $(X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ totalmente ordinati perché sottoinsiemi di $(\mathbb{N}, \leq)$ tot. ordinato.

Ricordo ordinamento prodotto $\leq_P := $ " $\leq_X \times \leq_Y$ "

$$(x_1, y_1) \leq_P (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 \leq_X x_2 \\ y_1 \leq_Y y_2 \end{cases}$$

(2) non è totalmente ordinato perché abbiamo che

$(x_1, y_1) = (0, 1)$ e $(x_2, y_2) = (1, 0)$ sono in $X \times Y$

ma non sono confrontabili in $(X \times Y, \leq_P)$ i.e. $\begin{cases} (0,1) \not\leq_P (1,0) \\ (1,0) \not\leq_P (0,1) \end{cases}$

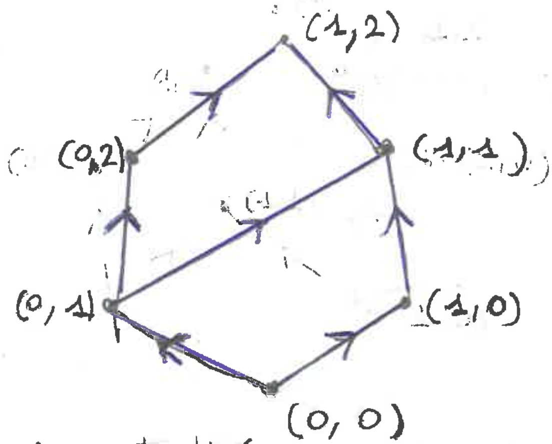
perché $x_1 = 0 \leq_X x_2 = 1$ ma $y_2 = 0 \leq_Y y_1 = 1$

* Come insieme, esso ha cardinalità

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y| = 6$$

$$\boxed{X \times Y = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}}$$

* Diagramma di Hasse $(X \times Y, \leq_P)$



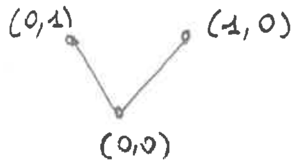
esibisce ordinamento parziale ma non totale di $(X \times Y, \leq_P)$

$\tilde{\leq}_P^R$ = Raffinamento di $\leq_P$: (*)

Affinché sia ordinamento totale $\forall (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$ si deve avere o $(x_1, y_1) \tilde{\leq}_P^R (x_2, y_2)$ o $(x_2, y_2) \tilde{\leq}_P^R (x_1, y_1)$

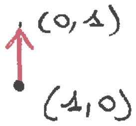
cioè diagramma di Hasse deve essere una catena o segmento verticale

Per un raffinamento, devo relazionare gli elementi:

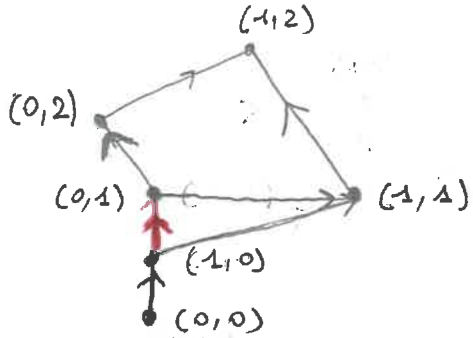


=> 2 scelte possibili

(I) => scelgo

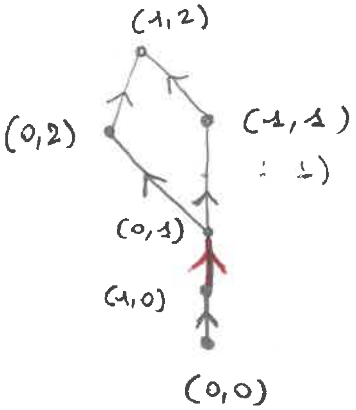


Pertanto diagramma, con tale scelta, si trasforma come in figura:



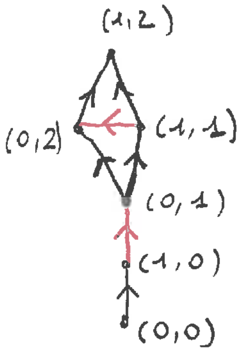
=> per le regole sui diagrammi di Hasse e la transitività di $\leq_P$ il triangolo si omette

⇓ il diagramma diventa quindi



=> devo relazionare (0,2) e (1,1) in modo compatibile con $\leq_P$

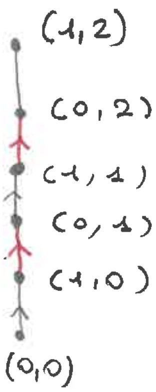
(II) Scelgo (1,1) → (0,2) => diagramma diventa



regole di rappresentazione

↓

=>



$\widetilde{\leq_P}^R$ ordinamento Totale ottenuto per raffinamento di $\leq_P$ ordinamento parziale

(b) Consideriamo

$$P_X : (X \times Y, \overbrace{\leq_X \times \leq_Y}^{\overset{\leq_P}{\shortparallel}}) \longrightarrow (X, \leq_X)$$

il discorso con P_Y è analogo visto che $\leq_X$ e $\leq_Y$ stesso ordinamento naturale

Per definizione, $\forall (x,y) \in X \times Y$

$$P_X(x,y) = x \in X \Rightarrow P_X \text{ suriettiva e non iniettiva}$$

Notare che

$$(x_1, y_1) \leq_P (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq_X x_2 \\ y_1 \leq_Y y_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Perciò

$$P_X((x_1,y_1)) = x_1 \leq_X P_X((x_2,y_2)) = x_2$$

$\Rightarrow P_X$ suriettivo e morfismo di insiemi ordinati (*)

(ii) Ricordo che $\leq_X$ e $\leq_Y$ indotti da $(\mathbb{N}, \leq)$ che è ordinamento totale $\Rightarrow (X, \leq_X)$ e $(Y, \leq_Y)$ totalmente ordinati

(a) Per def. di $\leq_L$, si consideri uno $\forall (x_1,y_1), (x_2,y_2) \in X \times Y$

Visto che $x_1, x_2 \in X$ e $(X, \leq_X)$ tot. ordinato, allora

o $x_1 <_X x_2$

o $x_1 >_X x_2$

o $x_1 =_X x_2$

- Se $x_1 <_X x_2 \Rightarrow (x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_1)$ per def. di $\leq_L$
- Se $x_1 >_X x_2 \Rightarrow x_2 <_X x_1 \Rightarrow (x_2, y_2) \leq_L (x_1, y_1)$ per def di $\leq_L$
- Se $x_1 = x_2$, allora le coppie sono (x_1, y_1) e (x_1, y_2) e visto che $y_1, y_2 \in Y$ tot. ordinato $\Rightarrow$ stabilisco se $(x_1, y_1) \leq_L (x_1, y_2)$ oppure $(x_1, y_2) \leq_L (x_1, y_1)$

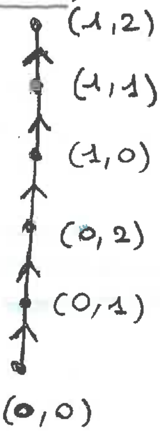
$$\Rightarrow \boxed{(X \times Y, \leq_L) \text{ TOTALMENTE ORD}}$$

(b) Su $(X \times Y, \leq_L)$ abbiamo ordine totale con diagramma di Hasse come sotto

- $P_X : X \times Y \twoheadrightarrow X$
  $P_Y : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ suriettive

- P_X è morfismo di insiemi ordinati perché
  $$P_X((x_1,y_1)) \leq_X P_X((x_2,y_2))$$
  $$\iff (x_1,y_1) \leq_L (x_2,y_2)$$

Diagramma Hasse $(X \times Y, \leq_L)$



- P_Y non è morfismo di insiemi ordinati perché
  $$P_Y((1,0)) = 0 <_Y P_Y((0,2)) = 2$$
  anche se $(1,0) \leq_L (0,2)$ in $(X \times Y, \leq_L)$

(iii) Prendiamo $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ ben ordinato $\Rightarrow$ totalmente ordinato.

$(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ totalmente ordinato (ma non ben ordinato)

$\mathcal{L}$ formato da successioni che ammettono limite e consideriamo ordinamento $\leq_{\mathcal{L}}$ come nel testo

$$\boxed{f \leq_{\mathcal{L}} g \iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(n) \leq_{\mathbb{R}} g(n),\ \forall n \geq_{\mathbb{N}} n_0}$$

(a) $f \leq_{\mathcal{L}} g \iff$ definitivamente $f(n) \leq_{\mathbb{R}} g(n)$

- $f \leq_{\mathcal{L}} f$ riflessiva ok

- $f \leq_{\mathcal{L}} g$ e $g \leq_{\mathcal{L}} f \not\Rightarrow f =_{\mathcal{L}} g$

Infatti $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) = g(n) \ \forall n \geq_{\mathbb{N}} n_0$

Ma $f(j) \neq g(j)$ in generale per $1 \leq j \leq n_0 - 1$

perciò $f \neq g$ in $\mathcal{L}$ no antisimmetrica

- $f \leq_{\mathcal{L}} g$ e $g \leq_{\mathcal{L}} h \Rightarrow f \leq_{\mathcal{L}} h \Rightarrow$ transitiva ok

$\Rightarrow$ $\boxed{\leq_{\mathcal{L}} \text{ non è relazione d'ordine}}$

(b) Devo verificare che ϕ è suriettiva

- $\forall r \in \mathbb{R} \Rightarrow \{f(n)\} := \{r\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. costante $\Rightarrow \phi$ suriettiva

- Pure se $\leq_{\mathcal{L}}$ non è relazione d'ordine, abbiamo

$f \leq_{\mathcal{L}} g$ (definitivamente) $\Rightarrow \phi(f) \leq_{\mathbb{R}} \phi(g)$

$\Rightarrow$ pure se $\mathcal{L}$ non è ordinato (no antisimmetrica $\leq_{\mathcal{L}}$)

ϕ conserva la relazione $\leq_{\mathcal{L}}$ in $\mathcal{L}$ e la relazione d'ordine $\leq_{\mathbb{R}}$ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento Esercizio 2

(i) Notiamo che

$$X=\{x_1,x_2\} \xrightarrow{\varphi} Y=\{1,2\}$$

$$x_1 \longrightarrow 1$$

$$x_2 \longrightarrow 2$$

φ è biiezione $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(1)=x_1$ e $\varphi^{-1}(2)=x_2$

- Su X abbiamo relazione $\rho =$ uguaglianza $\Rightarrow$ è relazione d'ordine

  $x_i = x_i$, $i\in\{1,2\}$ $\Rightarrow$ riflessiva

  $x_i = x_j$ e $x_j = x_i$ $\Rightarrow$ $x_i = x_j$ con $i=j\in\{1,2\}$ antisimmetrica

  $x_i = x_j$ e $x_j = x_k$ $\Rightarrow$ $x_i = x_k$ con $i=j=k\in\{1,2\}$ transitiva

- Però $(X,=)$ è parzialmente ordinato

  $\overset{\bullet}{x_1} \qquad \overset{\circ}{x_2}$ è diagramma Hasse di $(X,=)$

Invece $(Y,\leq_Y)$ è tot. ordinato

$$\begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ 1 \end{array}$$

diagramma Hasse di $(Y,\leq_Y)$

$\Rightarrow$ $(X,=)$ e $(Y,\leq)$ non possono essere insiemi ordinati isomorfi

- Tuttavia φ conserva ordinamento $x_1 \neq x_2$ di X

$$\varphi(x_1)=1 \quad \leq \quad \varphi(x_2)=2 \quad \text{e} \quad 1\neq 2 \quad (1<2)$$

(ii) Per hp. $(X,\{x_1,x_2\})$ totalmente ordinato $\Rightarrow$ $\forall\, x_1,x_2\in X$ diversi

o $x_1 <_X x_2$ o $x_2 <_X x_1$

Ma siccome φ è definita come $\varphi(x_1)=1 <_Y 2=\varphi(x_2)$

e φ era biiezione che conservava ordinamenti

$\Rightarrow$ $x_1 <_X x_2$

Per definizione di φ^{-1} anche esso conserva ordinamento

$\Rightarrow$ φ isomorfismo di insiemi totalmente ordinati

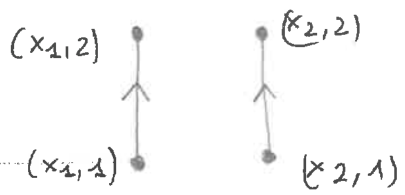
(iii) A livello insiemistico

$$X \times Y = \{(x_1,1),(x_1,2),(x_2,1),(x_2,2)\}$$

Se considero $((X \times Y), \le_L)$ dove $(X, =)$ e $(Y, \le_Y)$

$\Rightarrow$
$$(x_1,1) \le_L (x_1,2)$$
$$(x_2,1) \le_L (x_2,2)$$
⇝ non confrontabili

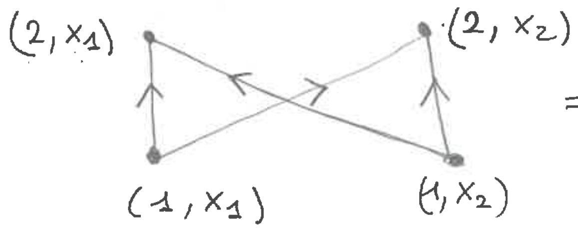
cioè diagramma di Hasse è



Invece

$$Y \times X = \{(1,x_1),(1,x_2),(2,x_1),(2,x_2)\}$$

Diagramma Hasse per $(Y \times X, \le_L)$



$\Rightarrow$ $((X \times Y), \le_L)$ e $((Y \times X), \le_L)$ non isomorfi come insiemi ordinati

(iv) $(Y \times Y) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

Se considero diagramma Hasse di $(Y \times Y, \le_Y \times \le_Y) = (Y \times Y, \le_P)$ abbiamo già visto in generale che ordinamento non è totale

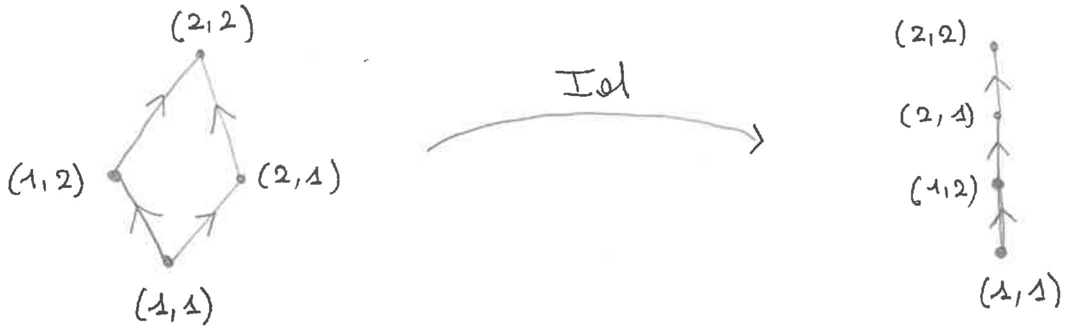
invece $(Y \times Y, \le_L)$ ha ordinamento totale → Esercizio 1

$\Rightarrow$ • $Id_{Y\times Y}$ non può essere isomorfismo di ins. ordinato

• è ovviamente una biiezione

• Per capire se conserva ordinamento di dominio e codominio

Hasse $(Y\times Y, \leq_Y \times \leq_Y)$ Hasse $(Y\times Y, \leq_L)$



$Id((1,1)) \leq_L Id((1,2)) \leq_L Id((2,2))$

$\overset{\wedge\!\!/\!/}{L}$

$Id(2,1)$

$\overset{\wedge\!\!/\!/}{L}$

$Id(2,2)$

ok

la biiezione conserva ordinamenti

(V) Supponiamo per assurdo $\exists$ relazione d'ordine $\leq_g$ su $\mathbb{C}$ che sia compatibile con operazioni di anello comm. unitario

Preso $i \in \mathbb{C}$, visto che $i \neq 0 \Rightarrow$

o $i <_g 0$ oppure $i >_g 0$

* se ad esempio vale e.g. $i >_g 0 \Leftrightarrow 0 <_g i$

Per Ip. $\leq_g$ è compatibile con $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ $\Rightarrow$ moltiplicando per i otteniamo

$$i \cdot (0) <_g i \cdot (i) = i^2 = -1 \Rightarrow \boxed{0 <_g -1}$$

$\Rightarrow$ $\leq_g$ induce su $\mathbb{R} = Re(\mathbb{C})$ ordinamento opposto all'ord. naturale $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$

Rimoltiplicando per i $\Rightarrow$ $i\cdot(0) <_g i\cdot(-1)$

$\Rightarrow$ $-i >_g 0$

Siccome su $\mathbb{R}$ ho trovato $-1 >_g 0$ e 1 è opposto rispetto a 0 in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$\Rightarrow 1 <_g 0$ cioè moltiplicando per -1: $\underset{1}{\underbrace{(-1)\cdot(-1)}} <_g (-1)\cdot(0) = 0$

Ma allora moltiplicando $-i \geq_{\mathcal{S}} 0$ per -1 otteniamo

$$i <_{\mathcal{S}} 0 \quad \#$$

perché per hp. $i \geq_{\mathcal{S}} 0$

Conti analoghi se si assumeva "$i <_{\mathcal{S}}' 0$" $\Rightarrow$ otteniamo sempre assurdi

$\Rightarrow \boxed{\nexists \leq_{\mathcal{S}} \text{ su } \mathbb{C} \text{ compatibile con } (\mathbb{C}, +, \cdot)}$

(vi) $Y^n = \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{n\text{-volte}}$ e $\{1, 2, \ldots, n\}$ ha ordinamento totale e ~~è~~ ben ordinato perché in $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(Y, \leq_Y)$ è totalmente ordinato per hp.

$(y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$

Pertanto, $\forall (y_1, \ldots, y_n), (y_1', \ldots, y_n') \in Y^n$ allora

$$(y_1, \ldots, y_n) \leq_{L, Y^n} (y_1', \ldots, y_n') \iff m := \min\{1, \ldots, n\} \text{ t.c. } y_m \neq y_m' \text{ e } y_m <_Y y_m'$$

Invece per $\boxed{Z := \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} Y^n}$

Visto che $Y^n \cap Y^k = \emptyset$ se $n \neq k$ $\Rightarrow$

$$Z = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}} Y^n$$

Pertanto $\underline{z} \in Z \iff \exists! \, k \geq 1$ t.c. $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in Y^k$

$lg(\underline{z}) = k$ lunghezza

Pertanto $\forall \, \underline{z}, \underline{w} \in Z$

$$\underline{z} \leq_L \underline{w} \iff \begin{cases} \text{o } lg(\underline{z}) < lg(\underline{w}) \\ \text{oppure } \boxed{k = lg(\underline{z}) = lg(\underline{w})} \wedge \underline{z} \leq_{L, Y^k} \underline{w} \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 3

(i) Visto che $(\mathbb{R}, \leq)$ è totalmente ordinato

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{Q}, \leq)$ entrambi totalmente ordinati

Se p.a. $\exists\, \varphi$ isomorfismo di insiemi ordinati

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}, \leq) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{Q}, \leq) \\ n & \longrightarrow & \varphi(n) = \dfrac{p_n}{q_n} \\ \wedge & & \wedge \\ n+1 & \longrightarrow & \varphi(n+1) = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \end{array}$$

$$n < n+1 \longrightarrow \varphi(n) = \frac{p_n}{q_n} < \varphi(n+1) = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

Poiché $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \subset (\mathbb{R}, \leq)$ per densità di $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\exists\ \frac{h}{k} \in \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \cap \mathbb{Q}$, in particolare si ha

$$\boxed{\frac{p_n}{q_n} < \frac{h}{k} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}}$$

Se φ fosse isomorfismo di ins. ordinati $\Rightarrow$

$$n = \varphi^{-1}\left(\frac{p_n}{q_n}\right) < \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{\varphi^{-1}\left(\frac{h}{k}\right)}} < \varphi\left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) = n+1 \quad \#$$

$\nexists$ intero tra n e $n+1$ (oppure non rispetterei $\leq_{\mathbb{Z}}$ se imponessi $\varphi^{-1}\left(\frac{h}{k}\right)$ diversamente)

(ii)
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}) & \xrightarrow{\lfloor\ \rfloor = \text{parte intera}} & (\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}}) \\ \dfrac{D}{d} & \longrightarrow & \left\lfloor \dfrac{D}{d} \right\rfloor \end{array}$$

Dove $D = d \cdot q + r \Rightarrow \frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$, con $0 \leq \frac{r}{d} < 1$

e $\left\lfloor \frac{D}{d} \right\rfloor = q =$ quoziente di $\begin{array}{c|c} D & d \\ \hline r & q \end{array}$

$$\frac{D_1}{d_1} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{D_2}{d_2} \Rightarrow \left\lfloor \frac{D_1}{d_2} \right\rfloor \leq_{\mathbb{Z}} \left\lfloor \frac{D_2}{d_2} \right\rfloor$$ ok

Analogamente per $x \in \mathbb{R}$ dove

$$\boxed{\lfloor x \rfloor := \max \{ k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x \}}$$

e $(\mathbb{R}; \leq_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{\lfloor\ \rfloor} (\mathbb{Z}; \leq_{\mathbb{Z}})$

(iii) $f: (\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{R}})$

- f morfismo insiemi ordinati $\Rightarrow$ " $x_1 \leq_{\mathbb{R}} x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq_{\mathbb{R}} f(x_2)$ "
- f suriettivo : $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\exists\, r \in \mathbb{R}$ t.c. $f(r) = \frac{p}{q}$
- $f|_{\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}}$: $\forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ codominio $\Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$

Poichè f definita su $\mathbb{R}$ e suriettiva ~~su~~ $\mathbb{Q}$ e $f|_{\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}} \Rightarrow$

$\exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $f^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{ \frac{p}{q}, r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \right\}$ i.e.

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$$

Siccome $r \neq \frac{p}{q}$ e $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ totalmente ordinato

o $r <_{\mathbb{R}} \frac{p}{q}$ o $\frac{p}{q} <_{\mathbb{R}} r$

Supponiamo e.g. $r <_{\mathbb{R}} \frac{p}{q}$ $\Rightarrow f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$

Tuttavia in $\left(r, \frac{p}{q}\right) \subset \mathbb{R}$, $\exists \frac{h}{k} \in \left(r, \frac{p}{q}\right) \cap \mathbb{Q}$

per densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Visto che $r < \frac{h}{k} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{h}{k} = f\left(\frac{h}{k}\right) < f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ (f morfismo di insiemi ordinati)

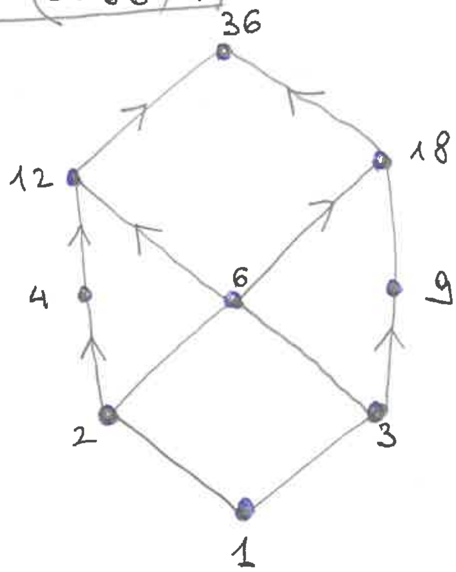
ma $f(r) > f\left(\frac{h}{k}\right)$ $\left(\text{perchè } f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\right)$

Le condizioni forniscono $\lightning$

(iv) $\rho = |$ divisibilità $\rightarrow$ ordinamento parziale

$\mathcal{D}_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Hasse per $(\mathcal{D}_{36}, |)$



$a \in \mathcal{D}_{36}$ minimo (*)
se $a | x, \ \forall x \in \mathcal{D}_{36}$

$g \in \mathcal{D}_{36}$ massimo
se $x | g, \ \forall x \in \mathcal{D}_{36}$

$b \in \mathcal{D}_{36}$ elemento minimale
se $x | b \Rightarrow x = b$

$h \in \mathcal{D}_{36}$ elemento massimale
$h | x \Rightarrow h = x$

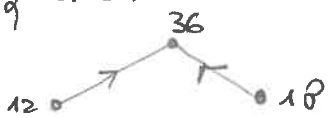
$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Max}(\mathcal{D}_{36}, |) = 36 \\ \mathrm{Min}(\mathcal{B}_{36}, |) = 1 \end{array}}$

non esistono massimali o minimali al di fuori di loro

Se invece consideriamo

$$\mathcal{B}_{36} = \{ d \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d < 36 \text{ e } d | 36 \}$$

Hasse parziale



e abbiamo

- $\mathrm{Min}(\mathcal{B}_{36}, |) = 1$
- $\nexists$ Max
- si hanno due elementi massimali per B_{36} che sono 12 e 18