

Svolgimento esercizio 10.1

(1)

(i)

$$144000 = 144 \cdot 10^3 = 36 \cdot 4 \cdot 10^3 = 6^2 \cdot 2^2 \cdot 10^3 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^3$$

fattorizzazione unica

Allora $d \mid 144000 \Leftrightarrow d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ (visto che $d \in \mathbb{N}$ e $d \mid 144000 \Rightarrow d > 0$)

Con $0 \leq a \leq 7, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 3$ (*)

• Fissata una terna (a, b, c) disponente come in (*), fornisce,

$$d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \text{ con } a, b, c \text{ come in (*)}$$

$\Rightarrow$ il numero di divisori di d sono in totale

$$(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$$

Infatti:

2^a è diviso da $2^0, 2^1, \dots, 2^a \rightarrow (a+1)$ divisori di questo tipo

3^b è diviso da $3^0, 3^1, \dots, 3^b \rightarrow (b+1)$ divisori di questo tipo

5^c è diviso da $5^0, 5^1, \dots, 5^c \rightarrow (c+1)$ divisori di questo tipo

Portanto, un siffatto d ha un numero pari di divisori

$$\Leftrightarrow (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) = 2^k \Leftrightarrow 2 \mid (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$$

Ma di primo $\Rightarrow \exists 2 \mid (a+1), \exists 2 \mid (b+1), \exists 2 \mid (c+1)$

$\Leftrightarrow \exists a \exists b \exists c$ dispari $\Leftrightarrow$ almeno uno tra gli esponenti (a, b, c) è dispari (come in *)

* 2 dispari, b, c qualsiasi $\Rightarrow a \in \{1, 3, 5, 7\}$ $0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 3$

$\downarrow$
4 scelte

$\downarrow$
3 scelte

$\downarrow$
4 scelte

$$4 \cdot 3 \cdot 4 = 48 \text{ scelte in tal caso}$$

* 1 pari, b dispari, c qualsiasi $\Rightarrow a \in \{0, 2, 4, 6\}$, $b=1$ $0 \leq c \leq 3$

$\downarrow$
4 scelte

$\downarrow$
1 scelta

$\downarrow$
4 scelte

$$4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 \text{ scelte in tal caso}$$

* d e b pari $\Rightarrow$ necessariamente c dispari

(2)

$$d \in \{0, 2, 4, 6\} \rightarrow 4 \text{ scelte}$$

$$b \in \{0, 2\} \rightarrow 2 \text{ scelte}$$

$$c \in \{1, 3\} \rightarrow 2 \text{ scelte}$$

$$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \text{ scelte in tal caso}$$

In totale ho

$$48 + 16 + 16 = 80 \text{ possibili divisori come richiesti}$$

(ii) $d \in \mathbb{N}$ è quadrato $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } d = y^2$

$d \in \mathbb{N}$ è cubo $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d = x^3$ ($0 \in \mathbb{N} \Rightarrow d \geq 0$)

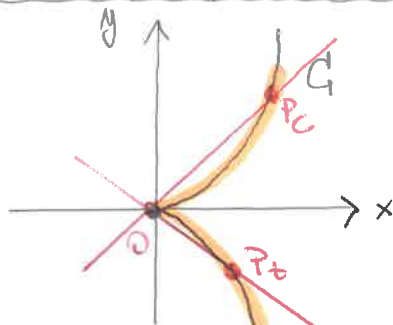
Consideriamo

$$Z := \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid 144.000 \text{ e } d \text{ è sia quadrato sia cubo}\}$$

Considero in $\mathbb{R}^2$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$$

infatti $\begin{cases} d = x^3 \\ d = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = y^2$



$C =$ cubica piana
cuspida

Prendo $y = tx$ fascio di rette per $O = (0,0)$

$$C \cap \{y = tx\}_{t \in \mathbb{R}} \text{ fornisce } \begin{cases} y = tx \\ t^2 x^2 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^3 - t^2 x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = tx \\ x^2(x - t^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &\bullet x = 0 \text{ soluz. doppia} \rightarrow O = (0,0) \\ &\bullet x = t^2 \text{ soluz. semplice} \Rightarrow P_t = (t^2, t^3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ i punti di C sono $P_t = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ variabile



$$\text{Pertanto } d = (t^2)^3 = (t^3)^2 = t^6 \Rightarrow$$

$$Z = \{d \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d \mid 144.000 \text{ e } d = t^6, t \in \mathbb{Z}\}$$

Portanto $d = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c + c$, ol qualcosa ma non cubo (3)

$\Leftrightarrow d \notin \mathbb{Z}$ ma (a, b, c) tutti pari, perché ol qualcosa

(a, b, c) pari e $d \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ almeno uno tra a, b, c non divisibile per 6

Come in (i) $\Rightarrow (0 \leq a \leq 7, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 3)$ (*)

- Se seleziono in modo da avere tutti e 3 pari ho:
 $d \in \{0, 2, 4, 6\} \rightarrow$ 4 scelte

$b \in \{0, 2\} \rightarrow$ 2 scelte

$c \in \{0, 2\} \rightarrow$ 2 scelte

↓

totale: 16 scelte

- Però non vogliamo $d \notin \mathbb{Z}$, cioè non tutti (a, b, c) divisibili per 6. $\Rightarrow$ devo scartare le possibilità date da

$d = 0, 6 \rightarrow$ 2 scelte

$b = 0 \rightarrow$ unica scelta

$c = 0 \rightarrow$ unica scelta

$\rightarrow$ totale: 2 scelte

$\Rightarrow$ totale da ol cercati = $16 - 2 = 14$

(iii) (Vedasi testo [Pisautini - Cattaneo, pp. 59-62])

(4)

Per ricorrenza abbiamo:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \forall m \geq 2$$

$\Rightarrow$ ogni termine è la somma dei due termini precedenti

Pertanto si ha ad esempio:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34, & 55, & \dots \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \\ F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10} \end{array}$$

Introdotta da Leonardo Fibonacci (~1200, Pisa) come soluzione del problema di crescita del numero di coppie di conigli nella riproduzione

- Ogni coppia di conigli impiega 1 mese per diventare adulta
- Nel mese successivo produce un'altra coppia
- Se al 1° mese si ha una sola coppia e nessuno degli animali muore e si creano coppie di sessi opposti, quante coppie vi sono dopo n mesi?

spirali semi girasoli
petali di alcuni fiori
cime dei cavolfiori

$$\Rightarrow F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$$

Come scrivere F_m come funzione di m ?

Si consideri che $F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \Rightarrow 1 \leq \frac{F_m}{F_{m-1}} = 1 + \frac{F_{m-2}}{F_{m-1}} \leq 2; \forall m \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* \ni x &:= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{F_m}{F_{m-1}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{F_{m-1} + F_{m-2}}{F_{m-1}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{F_{m-2}}{F_{m-1}} \right) = 1 + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{F_{m-2}}{F_{m-1}} \right) = 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione di II grado sono:

(5)

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ma visto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \geq 1 \Rightarrow$

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

* Ponendo

$$\alpha := x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{e } \beta := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

* se poniamo $F_m := \alpha^m$ allora vale $\alpha^m = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}, \forall m \geq 2$

Infatti α è soluzione di $x^2 - x - 1 = 0$ cioè

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$$

moltiplicando amboi membri per α^{m-2} si ha:

$$\alpha^m = \alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} \quad (\text{cioè } F_m = F_{m-1} + F_{m-2} \textcircled{*})$$

Vale anche per $F_m := \beta^m$

* Però $F_m = \alpha^m$ e $F_m = \beta^m$ non soddisfano nessuna delle due le condizioni iniziali

$$F_0 = 0 \quad (\text{no! } \alpha^0 = \beta^0 = 1)$$

$$F_1 = 1 \quad (\text{no! } \alpha^1 = \alpha \neq 1 \neq \beta = \beta^1)$$

* Jacques Binet (1843) [ma già noto ad Eulero, De Moivre, Bernoulli XVIII secolo]

Visto che α^m e β^m sono soluzioni di $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$, anche
✓ combinazione lineare delle prime.

$$F_m := A_1 \cdot \alpha^m + A_2 \beta^m, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}$$

lo è

Infatti:

$$\underbrace{A_1 \alpha^m + A_2 \beta^m}_{F_m} = A_1 (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}) + A_2 (\beta^{m-1} + \beta^{m-2})$$

$$= \underbrace{(A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \beta^{m-1})}_{F_{m-1}} + \underbrace{(A_1 \alpha^{m-2} + A_2 \beta^{m-2})}_{F_{m-2}}$$

Perciò cerchiamo soluzioni delle forme

$$F_m := A_1 \cdot \alpha^m + A_2 \cdot \beta^m \quad \text{con}$$

- $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$
- α, β le due soluz. di $x^2 - x - 1 = 0$
- $m \geq 0$

Taliche soddisfino condizioni iniziali

condizioni iniziali

$$\begin{cases} 0 = F_0 = A_1 \cdot \alpha^0 + A_2 \beta^0 \\ 1 = F_1 = A_1 \cdot \alpha^1 + A_2 \beta^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = A_1 + A_2 \\ 1 = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = -A_2 \\ 1 = -A_2 \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) + A_2 \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -A_2 \\ 1 = A_2 \left(-1 - \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = -A_2 \\ 1 = A_2 (-\sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}}$$

Perciò, $\forall m \geq 0$

$$F_m := \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^m - \beta^m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^m \right]$$

Oss $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \underline{\text{rapporto aureo}} = \underline{\text{proporzione divina}} = \underline{\text{numero di Fidia}} = \Phi$
o sezione aurea

$\Rightarrow$ successione di Fibonacci anche successione aurea

Oss

Pom enolo

6 bis

$$\Phi := \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{numero di Fidia}$$

Ricorobches

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi^2}{\Phi + 1} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\Phi}{\Phi + 1} = \frac{1}{\Phi} \quad (**)$$

$$\text{Ma } \frac{\Phi}{\Phi + 1} = \frac{\Phi + 1 - 1}{\Phi + 1} = 1 - \frac{1}{\Phi + 1} \stackrel{\substack{\downarrow \\ \Phi^2 = \Phi + 1}}{=} 1 - \frac{1}{\Phi^2}$$

$$\Rightarrow \text{da } (**) \quad 1 - \left(\frac{1}{\Phi}\right)^2 = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow 1 - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^2 = -\left(-\frac{1}{\Phi}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \left(-\frac{1}{\Phi}\right) = \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^2 \Rightarrow -\frac{1}{\Phi} = \beta \text{ altra soluzione di } x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \Phi} \quad \text{e} \quad \boxed{\beta = -\frac{1}{\Phi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_m = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^m - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^m \right], \quad \forall m \geq 0}$$

In particolare, per $m \gg 0$, $\left(-\frac{1}{\Phi}\right)^m \ll 1 \Rightarrow$

$$F_m \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \Phi^m$$

$\downarrow$ intero $\downarrow$ irrazionale

(iv) Periamo, $\forall m \geq 1$

(7)

$$Y_m := |Y_m| \quad \text{cardinalità di } Y_m$$

• Per $m=1$, $S_m = S_1 = \{Id\}$ e

$$Y_1 = S_1 \quad \text{infatti} \quad 0 \leq 1 = Id(1) \leq 2 \quad (ok)$$

$$\Rightarrow |Y_1| = y_1 = 1 = F_2 \leftarrow \text{II numero Fibonacci}$$

• Per $m=2$, $S_2 = \{Id, \theta = (1, 2)\}$

$$Y_2 = \{f \in S_2 \mid i-1 \leq f(i) \leq i+1, \forall 1 \leq i \leq 2\}$$

peranto

$$0 \leq Id(1) = 1 \leq 2 \quad (ok)$$

$$0 \leq \theta(1) = 2 \leq 2 \quad (ok)$$

$$1 \leq Id(2) = 2 \leq 3 \quad (ok)$$

$$1 \leq \theta(2) = 1 \leq 3 \quad (ok)$$

$$\Rightarrow Y_2 = S_2 \Rightarrow |Y_2| = y_2 = 2 = F_3 \leftarrow \text{III numero Fibonacci}$$

• È sufficiente dimostrare che, per $\forall m \geq 3$, si ha la legge ricorsiva

$$Y_m := Y_{m-1} + Y_{m-2} \quad \text{i.e.,} \quad F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$$

• Usiamo induzione su m . Se $m=1, 2$, vero! Assumiamo vero $\forall j \leq m-1$ e prendiamo indice m . Consideriamo

$$Y_m := \{f \in S_m \mid i-1 \leq f(i) \leq i+1, \forall 1 \leq i \leq m\}$$

$$\forall f \in Y_m \Rightarrow \begin{cases} f(m) \in \{1, 2, \dots, m\} \\ m-1 \leq f(m) \leq m+1 \end{cases} \Rightarrow m-1 \leq f(m) \leq m$$

$$\Rightarrow \{f(m) = m \text{ oppure } f(m) = m-1\}$$

Sia

$$Z_{m,m} := \{f \in Y_m \mid f(m) = m\}$$

$$Z_{m,m-1} := \{f \in Y_m \mid f(m) = m-1\}$$

$\Rightarrow$

$$Y_m = Z_{m,m} \cup Z_{m,m-1}$$

$$* \quad \mathbb{Z}_{m,m} \xleftrightarrow[\text{1-1}]{\text{Corrisp.}} \mathcal{Y}_{m-1} \Rightarrow |\mathbb{Z}_{m,m}| = |\mathcal{Y}_{m-1}| = \mathcal{Y}_{m-1} = \overline{F}_m \quad \text{per induzione} \quad (8)$$

$$* \quad \mathbb{Z}_{m,m-1} = \{ f \in \mathcal{Y}_m \mid f(m) = m-1 \}$$

Allora visto che $f \in \mathbb{Z}_{m,m-1} \subset \mathcal{Y}_m \Rightarrow$

$$\begin{cases} \forall i \leq m-2 \Rightarrow f(i) \leq m-1 \\ f \text{ permutazione (biunivoca)} \\ f(m) = m-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & \bullet \text{ l'immagine } m-1 \text{ è già usata per } m \xrightarrow{f} m-1 \\ & \bullet f(i) \leq m-2, \forall 1 \leq i \leq m-2 \\ & \bullet f(m-1) \neq m-1 \text{ (già usata per } m) \\ & \Rightarrow f(m-1) = m \\ & \text{visto che } f \in \mathcal{Y}_m \\ & \bullet \text{ Però visto che in } 1 \leq i \leq m-2 \text{ ho } m-2 \text{ cifre} \\ & \text{ e } f(i) \in \{1, \dots, m-2\} \text{ per hp} \\ & \Rightarrow \text{le immagini } \{1, \dots, m-2\} \text{ già utilizzate per } f(i), \text{ per } 1 \leq i \leq m-2 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(m-1) = m \text{ obbligatoriamente}}$$

Pertanto

$$\mathbb{Z}_{m,m-1} = \left\{ f \in \mathcal{Y}_m \mid \begin{cases} f(m) = m-1 \\ f(m-1) = m \end{cases} \right\} \quad \text{cioè } f = f' \circ (m-1, m) \quad \begin{array}{l} \mathbb{Z}_{m,m-1} \\ \psi \\ \text{permutazione che} \\ \text{scambia} \\ \text{solo le cifre} \\ \{1, \dots, m-2\} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_{m,m-1} \xleftrightarrow[\text{1-1}]{\text{Corrisp.}} \mathcal{Y}_{m-2} \Rightarrow |\mathbb{Z}_{m,m-1}| = |\mathcal{Y}_{m-2}| = \mathcal{Y}_{m-2} = \overline{F}_{m-1} \quad \text{per induzione}$$

• Visto che $\mathcal{Y}_m = \mathbb{Z}_{m,m} \cup \mathbb{Z}_{m,m-1} \Rightarrow$

$$|\mathcal{Y}_m| = |\mathbb{Z}_{m,m}| + |\mathbb{Z}_{m,m-1}| = \overline{F}_m + \overline{F}_{m-1}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{Y}_m = \overline{F}_{m+1} \quad \forall m \geq 2}$$

Svolgimento Es 2

(i) Per formare un insieme ordinato di m squadre da 4 persone (1)

• I squadre $\rightarrow \binom{4m}{4}$ modi differenti

$\Rightarrow$ • avanzando $4m-4$, per ogni scelta di I squadre $\Rightarrow$

II squadre $\binom{4m-4}{4}$ modi differenti

• $\vdots$
 m^{a} squadre $\binom{4}{4} = 1$ modo possibile

In totale insieme ordinato di m squadre

$$\binom{4m}{4} \cdot \binom{4m-4}{4} \cdot \dots \cdot \binom{4}{4} =$$

$$= \frac{(4m)!}{4! (4m-4)!} \cdot \frac{(4m-4)!}{4! (4m-8)!} \cdot \dots \cdot \frac{4!}{4! 0!} =$$

$$= \frac{4m(4m-1)(4m-2)(4m-3)}{4!} \cdot \frac{(4m-4)(4m-5)(4m-6)(4m-7)}{4!} \cdot \dots \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4! \cdot 1}$$

$$= \frac{(4m)!}{(4!)^m} = \underline{\underline{\# \text{ ordinato di } m \text{ squadre}}}$$

• Ma siccome ne c'è formare le squadre non conta ordine
 $\Rightarrow$ posso dividere per cardinalità di permutazioni
su insieme " m squadre" $\Rightarrow$

$$\# \text{ possibili squadre} = \frac{(4m)!}{(4!)^m \cdot m!}$$

Definizione prima in (i)

(2)

$$M = \{ \text{Mormini} \}$$

$$D = \{ \text{Donne} \} \text{ e } M \cup D = \text{Insieme totale giocatori}$$

$$\Rightarrow |M| = |D| = 2n$$

I squadra con 2 mormini + 2 donne

$$\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n}{2} = \binom{2n}{2}^2 \rightarrow \text{modi possibili differenti}$$

II squadra :

$$\binom{2n-2}{2}^2 \rightarrow \text{modi possibili differenti}$$

III squadra

$$\binom{2}{2}^2 = 1 \rightarrow \text{unica scelta possibile}$$

$\Rightarrow$

Totale # squadre ordinate possibili

$$\binom{2n}{2}^2 \cdot \binom{2n-2}{2}^2 \cdot \dots \cdot \binom{2}{2}^2 = \frac{((2n)!)^2}{2^{2n}}$$

Siccome no ordinamento, come prima diviso per $n!$

$$\boxed{\# \text{ totale} = \frac{((2n)!)^2}{2^{2n} \cdot n!}}$$

(3)


n pozycji

Colorene riga R_1 = { parole di lunghezza n con alfabeto A }

$$= \{ \underset{\text{funzioni}}{f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{A}} \}$$

$$\Rightarrow | \text{Correlazioni } R_1 | = 2^m = | \mathcal{Q} |^{1/2, \dots, m/2}$$

- Per evitare che R_1 sia tutta bianca o tutta nera
devo sottrarre le parole m-case elle

B B — — B
N N — — N

$$2^M - 2 = \frac{\text{modi cercati}}{\text{Per coprire } R_4 \text{ come solito}}$$

- Siccome colure le righe è indipendente, abbiamo in totale

$$(2^m - 2)^m = (2 \cdot (2^{m-1} - 1))^m = 2^m (2^{m-1} - 1)^m$$

moduli
distinct

(b) Siccome $\Sigma_{m,n}$ matrice quadrata di ordine n , allora N deve essere meno 1 volta su ogni riga di modo che sulla medesima colonna appaia 1 il numero N

- Per $R_1 \rightarrow n$ scelte
- Per $R_2 \rightarrow (n-1)$ scelte
- Per $R_u \rightarrow 1$ scelta

Pertinence $\{Righe\} \xrightarrow{\quad} \{Colonne\} \iff \sigma \in S_m$
 $i \xrightarrow{\quad} \sigma(i) \in \{1, \dots, m\}$

$$|S_n| = n! = \text{colorazioni richieste}$$

(c) $m = 2k \Rightarrow k$ caselle nere e k caselle bianche su ogni riga
In ogni riga scelgo k caselle nere $\Rightarrow$ restanti k obbligate bianche

Devo prendere k caselle tra le $2k$ per colorarle di nero $= N$ (4)

$\Rightarrow \binom{2k}{k}$ modi $\Rightarrow$ le bianche sono obbligate o potale scelte

Visto che colorare righe è indipendente abbiamo allora

$$\boxed{\left[\binom{2k}{k} \right]^{2k}} \text{ modi distinti}$$

(iv) Voglio dim. che, $\forall m \geq 1$, vale la formula

$$\sum_{k=0}^m k \cdot \binom{m}{k} = m \cdot 2^{m-1}$$

Indico $\rightarrow$ Proprietà binomiali

$$\sum_{k=0}^m k \cdot \binom{m}{k} = \sum_{k=1}^m k \cdot \binom{m}{k}$$

Notare che, per definizione di binomiali,

$$\begin{aligned} k \cdot \binom{m}{k} &= k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} = \\ &= m \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \stackrel{(m-1)-(k-1)=m-k}{=} m \cdot \binom{m-1}{k-1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^m k \cdot \binom{m}{k} = \sum_{k=1}^m k \cdot \binom{m}{k} = \sum_{k=1}^m m \cdot \binom{m-1}{k-1} = m \cdot \left(\sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} \right)$$

Ponendo $k-1 := h$ ho

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} &= m \cdot \left(\sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} \right) \text{ ma } \sum_{h=0}^{m-1} \binom{m-1}{h} = \left| \mathcal{P}(X_{m-1}, \dots, X_{m-1}) \right| \\ &= 2^{m-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^m k \cdot \binom{m}{k} = m \cdot 2^{m-1} \quad \text{ok}$$

II Metodo per induzione su n

(5)

Per $n = 1$

$$n \cdot 2^{n-1} = 1$$

$$\sum_{k=0}^1 k \binom{1}{k} = 0 \binom{1}{0} + 1 \binom{1}{1} = 1$$

$n=1$ ok

Assumo ok per ogni $i \leq n-1$ e prendo indice $n \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n}{k} \right] + n \binom{n}{n} = \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} \right] + \boxed{n}$$

Però

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \rightarrow \text{proprietà binomiali}$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n}{k} \right] = \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k-1}$$

Per induzione

$$\boxed{(n-1) \cdot 2^{n-2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k-1) \binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1}$$

Per induzione (A)

(P)

(A) Poniamo

$$h = k-1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k-1) \binom{n-1}{k-1} = \sum_{h=0}^{n-2} h \binom{n-1}{h} = \sum_{h=0}^{n-1} h \binom{n-1}{h} - (n-1) \binom{n-1}{n-1}$$

$$= (n-1) \cdot 2^{n-2} - (n-1) = \boxed{(n-1) \cdot [2^{n-2} - 1]}$$

(P) Poniamo

$$h = k-1 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n-1}{h} = \sum_{h=0}^{n-1} \binom{n-1}{h} - \binom{n-1}{n-1} = \boxed{2^{n-1} - 1}$$

$$P(X_{n-1}) = 2^{n-1}$$

= 1

In definitiva

(6)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} &= m + (m-1) \cdot 2^{m-2} + (m-1) \cdot [2^{m-2} - 1] + 2^{m-1} - 1 \\
 &= m + (m-1) 2^{m-2} + (m-1) 2^{m-2} - (m-1) + 2^{m-1} - 1 \\
 &= \cancel{m} + (m-1) 2^{m-2} + (m-1) 2^{m-2} - \cancel{m+1} + 2^{m-1} - \cancel{1} \\
 &= 2^{m-2} (m-1 + m-1) + 2^{m-1} = 2^{m-2} (2m-2) + 2^{m-1} \\
 &= 2^{m-1} (m-1) + 2^{m-1} = 2^{m-1} (m-1+1) = m \cdot 2^{m-1} \text{ (ok)}
 \end{aligned}$$

III Moolo $\rightarrow$ Teria iuri emi

Sia $X_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 1$, e sia

$$\mathcal{F}_m = \{ (A, a) \mid a \in A \subseteq X_m \} \subseteq \mathcal{P}(X_m) \times X_m$$

Calcoliamo $|\mathcal{F}_m|$ in 2 modi diversi

* Se scegliamo prima $A \subseteq X_m$ con $|A| = k$, abbiamo $\binom{m}{k}$ modi diversi. Fissato A , possiamo scegliere $a \in A$ in k modi diversi in A .

$\Rightarrow$

$$|\mathcal{F}_m| = \sum_{k=0}^m k \cdot \binom{m}{k}$$

* Però se scegliamo prima $a \in X_m \rightarrow$ m modi diversi. Poi scegliamo un $\neq$ sottoinsieme A di X_m contenente a cioè un $\neq$ sottoinsieme di $X_m \setminus \{a\} \Rightarrow$

$$|\mathcal{P}(X_m \setminus \{a\})| = 2^{m-1}$$

$\Rightarrow$

$$|\mathcal{F}_m| = m \cdot 2^{m-1}$$

Perciò

$$\sum_{k=0}^m k \binom{m}{k} = m \cdot 2^{m-1}$$

(ok)

IV modo → con binomio di Newton

(7)

Prendiamo $\mathbb{R}[x]$ anche polinomi e considero

$$D = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \quad \text{derivazione}$$

$$ev_1 : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{valutazione in } x=1$$
$$f(x) \longrightarrow ev_1(f(x)) := f(1)$$

Sia $P(x) := (x+1)^m \in \mathbb{R}[x]$ e applico $(ev_1 \circ D) : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}[x] & \xrightarrow{ev_1} & \mathbb{R} \\ P(x) & \longrightarrow & D(P(x)) & \longrightarrow & ev_1(D(P(x))) \end{array}$$

Pertanto:

$$D(P(x)) = m \cdot (x+1)^{m-1} \quad \text{perciò}$$

$$ev_1(D(P(x))) = m \cdot (x+1)^{m-1} \Big|_{x=1} = m \cdot 2^{m-1}$$

Ma per Newton posso considerare lo sviluppo di $P(x)$ come

$$P(x) = (x+1)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k$$

⇒

$$\begin{aligned} D(P(x)) &= D\left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k\right) = \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot D(x^k) = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} k \cdot x^{k-1} \end{aligned}$$

$D(1)=0$
 $D(x^k) = k \cdot x^{k-1}$

⇒ perciò

$$\begin{aligned} ev_1(D(P(x))) &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot k \cdot 1^{k-1} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot k \end{aligned}$$

⇒

$$m \cdot 2^{m-1} = \sum_{k=0}^m k \cdot \binom{m}{k} \quad (OK)$$