Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 12 (4 Giugno 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Sia dato $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ il piano euclideo con riferimento cartesiano $RC(O;\ x,y)$, dove (x,y) sono le coordinate cartesiane del riferimento e si consideri la sua inclusione naturale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (x,y) & \mapsto & [1,x,y] \end{array}$$

Nelle coordinate euclidee date con l'inclusione sopra descritta, sia data $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ la **conica euclidea** di equazione cartesiana nel riferimento dato:

$$\mathcal{C}:\ f(x,y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0.$$

(i) Classificare la conica $\mathcal{C}$ dal punto di vista affine, deducendo in opportune coordinate affini (s,t) per la struttura di piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, la **forma canonica affine** di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare la **forma canonica metrica** di $\mathcal{C}$ in coordinate cartesiane (u,v) di un riferimento cartesiano $RC(O';\ u,v)$ per $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, determinando esplicitamente l'**isometria** che trasforma il riferimento $RC(O;\ x,y)$ in $RC(O';\ u,v)$ in cui $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica metrica.

(iii) Dedurre nel riferimento cartesiano originario $RC(O;\ x,y)$:
- le coordinate dell'eventuale **centro di simmetria** di $\mathcal{C}$ (oppure del **vertice** se $\mathcal{C}$ é parabola),
- le equazioni cartesiane degli **assi di simmetria** (o dell'**asse di simmetria** se $\mathcal{C}$ é parabola),
- in caso $\mathcal{C}$ sia iperbole, stabilire quale dei due assi di simmetria sia **asse trasverso**, e determinare le equazioni cartesiane dei suoi **asintoti**.

(iv) Determinare esplicitamente l'**affinitá** che trasforma il riferimento cartesiano $RC(O;\ x,y)$ nel riferimento affine $RA(O'',\ u,v)$ dove $\mathcal{C}$ assume la sua **forma canonica affine** come trovata al punto (i).

Esercizio 2. Sia dato $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ lo spazio euclideo 3-dimensionale, con riferimento cartesiano $RC(O;\ x,y,z)$, dove (x,y,z) sono le coordinate cartesiane del riferimento e si consideri la sua inclusione naturale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \mapsto & [1,x,y,z] \end{array}$$

Nelle coordinate euclidee date con l'inclusione sopra descritta, sia $\Sigma \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la **quadrica euclidea** di equazione cartesiana

$$\Sigma:\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 2y + 2z = 0.$$

(i) Classificare la quadrica Σ dal punto di vista affine, deducendo la**forma canonica affine** di Σ in opportune coordinate affini (x',y',z') per la struttura di spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(ii) Classificare dal punto di vista affine la **conica sezione** ottenuta intersecando Σ con il piano $\pi : x + y + z = 0$.

(iii) Stabilire se la **quadrica euclidea** $\Gamma \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ **quadrica euclidea** di equazione cartesiana

$$\Gamma:\ g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + x + z - 1 = 0$$

puó essere **congruente** a Σ oppure se puó essere **affinemente equivalente** a Σ.

Osservazione preliminare

(1)* Se fossimo partiti SEMPLICEMENTE da

$$\boxed{\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) \mid f(x,y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}\,xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0\}}$$

NON STO IMPONENDO NULLA su immersione di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Allora ho libertà di identificare (x,y) coord. euclidee come coordinate dedotte da una $\forall$ carta affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ (con struttura nella carta affine più "specifica" euclidea)

$\longrightarrow$ assumo $\exists$ prodotto scalare e dunque norma $\Rightarrow$ distanze, ortogonalità

Allora come a lezione Prof Trapani posso prendere

$$\mathcal{C}:\ f(x,y) = \underbrace{\boxed{7x^2 - 10\sqrt{3}\,xy - 3y^2}}_{\text{parte quadratica di } \mathcal{C}} + \underbrace{\boxed{13\sqrt{3}x - 12y}}_{\text{parte lineare di } \mathcal{C}} \underbrace{-12}_{\text{termine noto di } \mathcal{C}}$$

e scrivere $A_{\mathcal{C}}$ (come a teoria Prof. Trapani)

parte forma quadratica

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} & -\frac{13}{2}\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 & -6 \\ -\frac{13}{2}\sqrt{3} & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

metà parte lineare

metà parte lineare

termine noto

Scrivere così implicitamente vuole dire che

$\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ si vede come ottenuto in A_2 cioè

$$\boxed{x = \frac{X_0}{X_2} \qquad y = \frac{X_1}{X_2}}$$

e $\overline{\mathcal{C}}^{\,\pi}$ = completamento proiettivo di $\mathcal{C}$ $= \{7X_0^2 - 10\sqrt{3}\,X_0X_1 - 3X_1^2 + 12\sqrt{3}\,X_0X_2 - 12X_1X_2 - 12X_2^2 = 0\}$

Così

$\overline{\mathcal{C}}^{p} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ conica proiettiva con

$$A_{\overline{\mathcal{C}}^{p}} := \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} -\frac{13}{2}\sqrt{3} \\ -6 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -\frac{13}{2}\sqrt{3} & -6 \end{matrix}} & & -12 \end{array}\right) = A_{\mathcal{C}}$$

e le parti si corrispondono

cioè la vecchia $\mathcal{C}$ è vista come

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}^{p} \cap A_2 \quad \text{con} \quad A_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$x_2 \neq 0$

Devo solo stare attento che i punti impropri di $\mathcal{C}$ sono con $x_2 = 0$ cioè della forma $[\alpha, \beta, 0]$

* Se invece IMPONGO come nel testo

$$\mathbb{E}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$
$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

vuol dire che $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ identificato ad A_0

con struttura più raffinata euclidea

$$\boxed{x = \frac{x_1}{x_0} \qquad y = \frac{x_2}{x_0}}$$

e $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}^{p} \cap A_0$

perciò $\overline{\mathcal{C}}^{p}$ = omogeneizzazione rispetto a x_0 di $f(x, y)$

ex forma quadratica di $\mathcal{C}$

$$\overline{\mathcal{C}}^{p}: F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) = \boxed{7x_1^2 - 10\sqrt{3}\, x_1 x_2 - 3x_2^2}$$

$$\boxed{+ 12\sqrt{3}\, x_0 x_1 - 12\, x_0 x_2}$$

ex forma lineare di $\mathcal{C}$

$$\boxed{-12x_0^2} = 0$$

ex termine noto di $\mathcal{C}$

Perciò $\overline{\mathcal{C}}^{n}$ riordinata è $-12x_0^2+12\sqrt{3}\,x_0x_1-12x_0x_2+7x_1^2-10\sqrt{3}\,x_1x_2-3x_2^2$ (3)

$$A_{\overline{\mathcal{C}}^{n}} = \begin{pmatrix} -12 & 6\sqrt{3} & -6 \\ 6\sqrt{3} & 7 & -5\sqrt{3} \\ -6 & -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

come usuali coniche proiettive

ed

$$A_{\mathcal{C}} = A_{\overline{\mathcal{C}}^{n}} = \begin{pmatrix} -12 & 6\sqrt{3} & -6 \\ 6\sqrt{3} & 7 & -5\sqrt{3} \\ -6 & -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

perchè voglio (nella inclusione imposta $(x,y) \longrightarrow [1,x,y]$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) & & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{C}}^{n} \\ & & \\ \overline{\mathcal{C}}^{n} \cap A_0 & \longleftarrow & \overline{\mathcal{C}}^{n} \\ \| & & \cap \\ \mathcal{C} & & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

corrispondenza 1-1
conica proiettiva
conica euclidea

Perciò il testo formulato IMPONE

$$\mathcal{C} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{E}^2 \;\middle|\; f(x,y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}\,xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}\,x - 12y - 12 = 0 \right\}$$

$$x = \frac{X_1}{X_0} \quad e \quad y = \frac{X_2}{X_0}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -12 & 6\sqrt{3} & -6 \\ 6\sqrt{3} & 7 & -5\sqrt{3} \\ -6 & -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

è la COERENTE matrice completa di $\mathcal{C}$

Affrontiamo l'esercizio con questa precisazione
(le strategie sarebbero analoghe come a lezione
Prof. Trapani con libertà scelta della carta)

$\mathscr{C} := \{(x,y) \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) \mid f(x,y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0\}$, $x = \frac{x_1}{x_0}$ $y = \frac{x_2}{x_0}$

$$\Rightarrow \quad A_{\mathscr{C}} := \begin{pmatrix} -12 & 6\sqrt{3} & -6 \\ 6\sqrt{3} & 7 & -5\sqrt{3} \\ -6 & -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$ compatibile con scelta carta A_0

$\det(A_{\mathscr{C}}) \neq 0 \Rightarrow rg(A_{\mathscr{C}}) = 3 \Rightarrow$ conica euclidea generale → ellisse, iperbole, parabola generale

- $rg(A_{\mathscr{C}}) = rg\begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \mathscr{C}$ conica a centro ($\Rightarrow$ no parabole)
- $\det(\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}) = -21 - 75 = -96 < 0 \Leftrightarrow \mathscr{C}$ iperbole (siamo su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

$\boxed{\Delta = -4\det(\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}) > 0}$

$\Downarrow$

forma canonica affine in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con (s,t) affini

$$\boxed{s^2 - t^2 = 1}$$

- Centro simmetria di $\mathscr{C}$ (ricordo $rg(\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}) = rg\begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} = 2$)

$$\begin{cases} 6\sqrt{3} + 7x - 5\sqrt{3}y = 0 \\ -6 - 5\sqrt{3}x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$ asintoti: rette per C con vettori direttori dati dai punti $\mathscr{C}_\infty$ cioè $\mathscr{C}_\infty = \overline{\mathscr{C}}^{\,\mathbb{P}} \cap \{x_0 = 0\}$

(ii) Riduzione a forma canonica metrica

$\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}(x) := 7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2 \rightsquigarrow A_{\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}} = \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$

forma quadratica di $\mathscr{C}$

simmetrica $\Rightarrow$ operatore autoaggiunto

$A_{\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}}$ si diagonalizza in base ortonormale $\rightsquigarrow$ ISOMETRIA

$P_{A_{\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}}}(t) = t^2 - tr(A_{\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}})t + \det(A_{\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}})$ polinomio caratteristico

$= t^2 - 4t - 96$

$t = \begin{cases} 12 = \lambda_1 \\ -8 = \lambda_2 \end{cases}$ $\boxed{\text{autovalori di } A_{\mathcal{Q}_{\mathscr{C}}}}$

$*$ $E_{12}(A_{Q_e}) = \ker\left\{\begin{pmatrix} 7-12 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3-12 \end{pmatrix}\right\} =$

$= \ker\left\{\begin{pmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -5x - 5\sqrt{3}\,y = 0\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + \sqrt{3}\,y = 0\right\} = \mathrm{Span}\left\{ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\boxed{\underline{f}_1 := \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{autoversore } \lambda = 12}}$$

$\Downarrow$

$*$ $E_{-8}(A_{Q_e}) = (E_{12}(A_{Q_e}))^{\perp} = \mathrm{Span}\left\{ \underline{f}_2 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right\}$

Preso $\mathcal{Y} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ base ortonormale di autovettori per A_{Q_e}

$M := M_{\mathcal{E},\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \in SO(2,\mathbb{R})$ $\to$ $\boxed{\text{ROTAZIONE}}$

perché $O(2,\mathbb{R})$ con $\det(M) = +1$

Trasformazione coordinate,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1}{2}w \\ y = -\frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}w \end{cases}}$$ isometria lineare

$*$ Nelle nuove coordinate la conica $\mathcal{C}$ assume equazione:

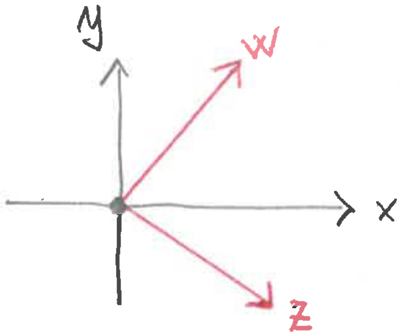
$$\mathcal{C}: \underbrace{12z^2 - 8w^2}_{\text{f. q. diagonale}} + 12\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{1}{2}w\right) - 12\left(-\frac{1}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right) - 12 = 0$$

N.B. Notare che secondo autovalore negativo per f. c. m. iperbole infatti voglio arrivare ad una forma

$$\boxed{\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1} \iff \underbrace{\left(\frac{1}{a^2}\right)}_{\text{positivo}} u^2 - \underbrace{\left(\frac{1}{b^2}\right)}_{\text{negativo}} v^2 = 1$$

$\mathscr{C} := \{12z^2 - 8w^2 + 24z - 12 = 0\}$ in $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con R.C. $(O; z, w)$

6



ATTENZIONE ora la procedura dipende da f.c.m. cui devo arrivare → ellisse → iperbole → parabola

$\Rightarrow$ $\mathscr{C}$ posso dividere per 4

(*) $\boxed{\mathscr{C}: 3z^2 - 2w^2 + 6z - 3 = 0}$ questa è equazione di $\mathscr{C}$ letta nel riferimento ROSSO

* Faccio traslazione ⟶ per far sparire termine lineare in z

$$\boxed{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = u + \alpha \\ w = v \end{cases}}$$

α da determinare

$\mathscr{C}$: $3(u+\alpha)^2 - 2v^2 + 6(u+\alpha) - 3 = 0$

$3(u^2 + 2\alpha u + \alpha^2) - 2v^2 + 6u + 6\alpha - 3 = 0$

$3u^2 - 2v^2 + \underbrace{(6\alpha + 6)u}_{\text{lineare}} + \underbrace{3\alpha^2 + 6\alpha - 3}_{\text{noto}} = 0 \Rightarrow$ confrontando con (*)

Poniamo $6\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1} \Rightarrow \alpha = -1$ fa sparire termine lineare

$\Rightarrow 3\alpha^2 + 6\alpha - 3 \overset{\boxed{\alpha=-1}}{=} 3(-1)^2 + 6(-1) - 3 = \cancel{3} - 6 - \cancel{3} = -6$

$\Rightarrow$ con la traslazione $\boxed{\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 1 \\ v \end{pmatrix}}$

otteniamo nelle coordinate (u, v)

$$\boxed{\mathscr{C}: 3u^2 - 2v^2 - 6 = 0}$$

cioè $\frac{3}{6}u^2 - \frac{2}{6}v^2 = 1 \iff \boxed{\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3} = 1}$

↓

forma canonica metrica di $\mathscr{C}$

Perciò abbiamo le varie ISOMETRIE intermedie

elimina termine xy $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right.$

elimina parte lineare $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-1 \\ v \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u-1 \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

ISOMETRIA TOTALE

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}}{2} u + \frac{1}{2} v - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= -\frac{1}{2} u + \frac{\sqrt{3}}{2} v + \frac{1}{2} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + M^t \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}$$

ISOMETRIA INVERSA TOTALE

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{2} y + 1 \\ v &= \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \end{aligned}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}^2(\mathbb{R})}$$

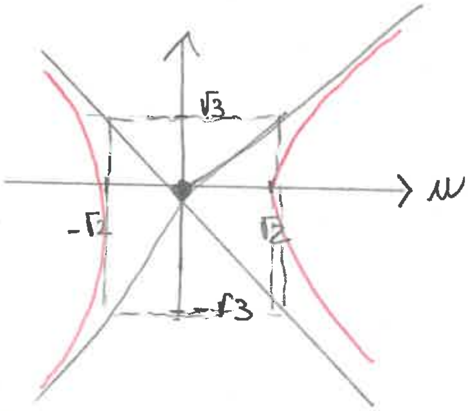
(iii) In RC $(O'; u, v)$

(u, v) : $\boxed{\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{3} = 1}$

Centro simmetria $(0, 0)$

Asse trasverso $v = 0$

Asse non trasverso $u = 0$



Asintoti: $u = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\, v$

In RC $(O; x, y)$

(x, y) | $f(x,y) = 0$ originale

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$ (come prima fatto senza riduzione f.cm.)

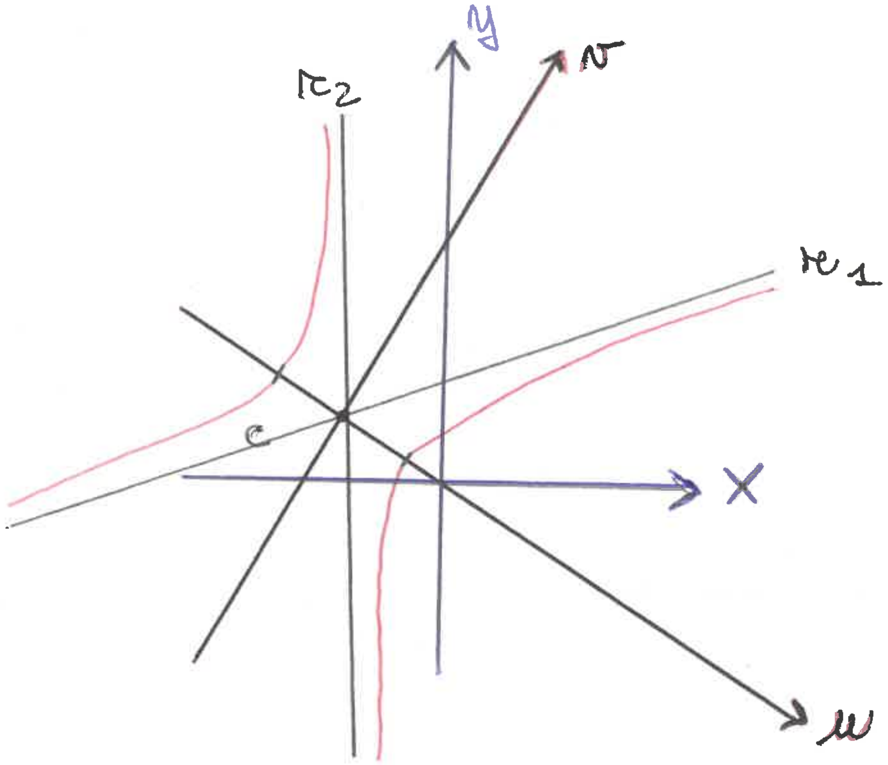
$\Rightarrow x + \sqrt{3}\, y = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\, x - y + 2 = 0$

$(3-\sqrt{2})\, x - (\sqrt{3}+\sqrt{6})\, y + 2\sqrt{3} = 0 : r_1$

$(3+\sqrt{2})\, x + (\sqrt{6}-\sqrt{3})\, y + 2\sqrt{3} = 0 ; r_2$

Infatti $\mathcal{C}_\infty = \{ [0, \sqrt{3}+\sqrt{6}, 3-\sqrt{2}],$
$[0, \sqrt{6}-\sqrt{3}, -3-\sqrt{2}] \}$



(x, y) vecchio rif.

$(u; v)$ nuovo rif.

$\mathcal{C}$ nei due rif.

(iv) Riduzione f.c.a.

In (u, v) $\quad \mathcal{C}: \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{v^2}{3} = 1$ è f.c.m.

Ponendo (riduz. Silvester $\Rightarrow$ altero unità di misura su asse u e asse v)

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \sqrt{2}\, s \\ v = \sqrt{3}\, t \end{array}}$$

(s, t) coord. affini

$$\Rightarrow \quad \mathcal{C}: \frac{(\sqrt{2}\, s)^2}{2} - \frac{(\sqrt{3}\, t)^2}{3} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad s^2 - t^2 = 1}$$ f.c.a. di $\mathcal{C}$

Se $\boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}}$ con $N = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$

AFFINITA' LINEARE

$\downarrow$

tra RC $(O'; u, v)$
del RA $(O'; s, t)$

9

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +1/2 \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{=} M\left(N\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

AFFINITA' TOTALE

da $RC(O; x, y)$ a $RA(O'; s, t)$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Perciò affinità che riduce ℓ a sua f. c. d. è:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

cioè sostituendo in $f(x, y) = 0$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2} s + \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} s + \frac{3}{2} t + \frac{1}{2}$$

si arriva a $\boxed{s^2 - t^2 = 1}$

Svolgimento esercizio 2

(i) Analogamente a prima, siccome abbiamo imposto

$$\mathbb{E}^3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$
$$(x,y,z) \longmapsto [1,x,y,z]$$

vuol dire che $\mathbb{E}^3(\mathbb{R}) = A_0$ con struttura euclidea

$$\Downarrow \qquad x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad z = \frac{x_3}{x_0}$$

$\Sigma \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

$$f(x,y,z) = \underbrace{x^2+y^2-z^2}_{\substack{Q_\Sigma \\ \text{forma quadratica di } \Sigma}} + \underbrace{2x+2y+2z}_{\text{parte lineare di } \Sigma} = 0$$

$\Rightarrow \overline{\Sigma}^{\wedge} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$\Rightarrow F(x_0,x_1,x_2,x_3) = x_1^2+x_2^2-x_3^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_0x_3 = 0$

$\downarrow$

$\overline{\Sigma}^{\wedge}$ è tutta forma quadratica perché luogo in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$$\Downarrow$$

A_Σ <u>DEVE ESSERE LA STESSA DI</u> $A_{\overline{\Sigma}^{\wedge}}$

perché voglio

$$\Sigma \rightsquigarrow \overline{\Sigma}^{\wedge} \rightsquigarrow \overline{\Sigma}^{\wedge} \cap A_0 = \Sigma$$

<u>corrispondenza biunivoca</u>

Quindi

$$A_\Sigma = A_{\overline{\Sigma}^{\wedge}} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ \boxed{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

metà parte lineare

metà parte lineare

A_{Q_Σ}

* $\det(A_\Sigma) = \det(A_{\overline{\Sigma}^{\nu}}) \neq 0 \Rightarrow rg(\Sigma_1) = 4$

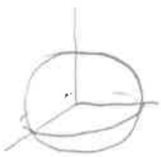
$\Rightarrow \Sigma_1$ quadrica generale ($\Rightarrow$ non singolare)

* $\det(A_{Q_\Sigma}) = \det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \Sigma_1$ è quadrica a centro

Possibilità (f.c.a.)

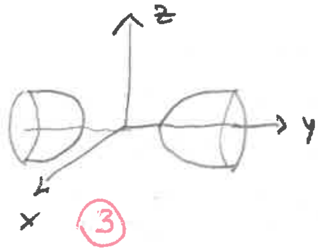
$x^2+y^2+z^2=1$	$x^2+y^2+z^2=-1$	$x^2-y^2-z^2=1$	$x^2+y^2-z^2=1$
Ellissoide punti reali	Ellissoide punti immaginari	Iperboloide ellittico	Iperboloide iperbolico



1

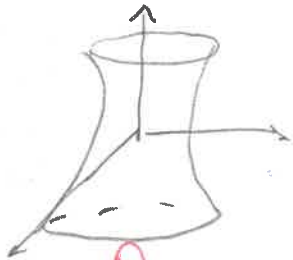
$\emptyset$

2



3

a 2 falde



4

a 1 falda

Notiamo che

- $O = (0,0,0) \in \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma \neq \emptyset \Rightarrow$ ellissoide punti immag. escluso (2) NO

- $\Sigma_\infty = \overline{\Sigma_1}^{\nu} \cap \{x_0 = 0\} = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

è una conica proiettiva sezione come per (4)

Mentre

(1) conica all'infinito $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$ (1) NO

(3) conica all'infinito $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

Nella carta affine del piano $\{x_0 = 0\} \equiv \mathbb{P}^2$

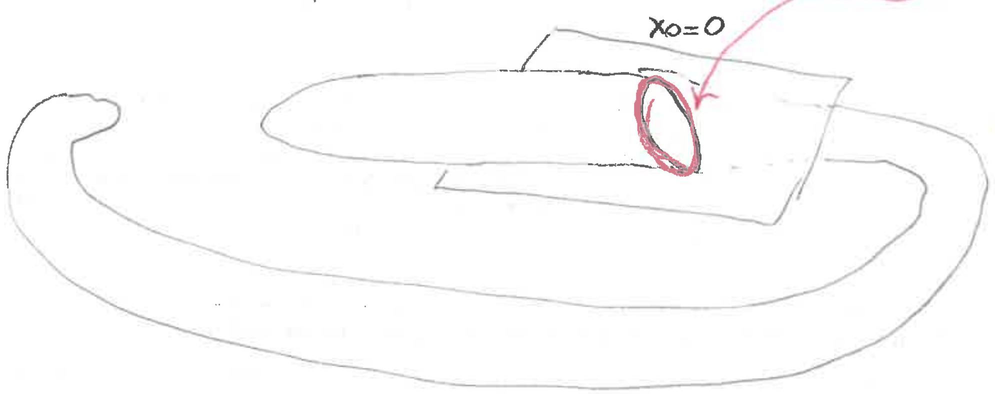
$$[0, x_1, x_2, x_3] \quad \text{dove} \quad x_1 \neq 0$$

pongo $\frac{x_2}{x_1} = u \quad \frac{x_3}{x_1} = v \quad \Rightarrow$ ottengo

$$1 - u^2 - v^2 = 0 \iff 1 = u^2 + v^2$$ è ellisse generale

$\downarrow$

per questo iperboloide ellittico



(i) Mentre in tal caso in $\{x_0 = 0\} \equiv \mathbb{P}^2$

$$[0, x_1, x_2, x_3] \text{ dove } x_1 \neq 0$$

$$1 + u^2 - v^2 = 0 \iff 1 = v^2 - u^2$$ iperbole generale

$\Rightarrow$ Σ è iperboloide iperbolico o ad una falda

In opportune coordinate affini (x', y', z') di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R}) = A_0$ la f. c. a. di Σ è:

$$\boxed{(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 1}$$

(ii) $\pi: \; x + y + z = 0 \Rightarrow$ $\Sigma \cap \pi: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 2(x+y+z) = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

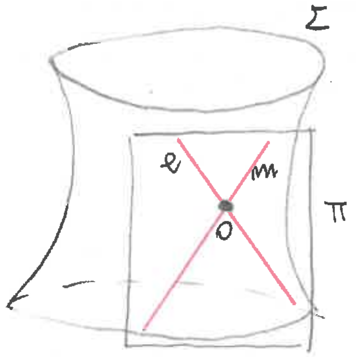
Ma $z = -(x+y) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2-(-(x+y))^2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$l:\begin{cases} x=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad m:\begin{cases} y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$\Sigma \cap \pi = l \cup m$ due rette del piano π incidenti in O

$\Rightarrow$ $\Sigma \cap \pi$ è iperbole semplicemente degenere



(iii) $T': \underbrace{x^2+y^2+2xy}_{\text{f.q. di } T'} + \underbrace{x+z}_{\text{parte lin } T'} \overbrace{-1}^{\text{termine noto}} = 0$

$$A_{T'} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A_{T'})=0$ $\det(A_{2,T'})=0$ però $\det\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0$

$\Rightarrow$ $rg(A_{T'})=3$ $\Rightarrow$ T' semplicemente degenere

$\Rightarrow$ T' non può essere né isometrica né aff. equiv. a Σ

* Poiché $rg(A_{\Gamma'}) = 3 \Rightarrow \dim(\ker(A_{\Gamma'})) = 4-3=1$ (5)

$\Rightarrow \quad Sing(\Gamma') = \mathbb{P}(\ker(A_{\Gamma'}))$ è un punto in $\mathbb{P}^3$
$$\mathbb{P}(\ker(A_{\Gamma'})) = \{P\}$$

Se $P \in A_0$ $\quad \Gamma' =$ cono (cioè pure Γ' è singolare)

Se $P \in \mathbb{P}^3 \setminus A_0$ $\quad \Gamma' =$ cilindro (~~Γ'~~ singolare ma Γ' nb)

$$\ker(A_{\Gamma'}) = \begin{cases} -2x_0 + x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ \cancel{+}x_1 + \cancel{x}_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P = [0,1,-1,-1] \in \mathbb{P}^3 \setminus A_0$$

$\Rightarrow \Gamma'$ cilindro formato da tutte rette // con vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Poiché $rg(A_{Q_{\Gamma'}}) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow \Gamma'$ cilindro PARABOLICO infatti

Poiché le rette del cilindro sono // $Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

taglio Γ' con piano

$$\alpha_0 : \; Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}^{\perp} \Leftrightarrow \boxed{x - y - z = 1} : \alpha_0$$

$$\Gamma' \cap \alpha_0 : \begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy + x + z - 1 = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x - y - 1 \\ (x^2 + y^2 + 2xy) + x + (x - y - 1) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{C} \begin{cases} z = x - y - 1 \\ (x + y)^2 + 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

<u>Conica sezione</u>

Se voglio capire che conica è su α_0 : $x - y - z = 1$ $\Rightarrow$ cerco

$$\mathcal{C}_\infty \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_3 = x_1 - x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \to \text{sol. doppia} \\ x_0 = 0 \\ x_3 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_\infty := [0, 1, -1, 2]$

$\downarrow$

<u>punto doppio</u>

<u>su $(\alpha_0)_\infty$ = retta impropria di α_0</u>

$\Rightarrow \Gamma \cap \alpha_0$

<u>PARABOLA</u>