Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 11 (28 Maggio 2025) - Prof. F. Flamini

Per i seguenti esercizi sia $\mathbb{K}$ il campo o $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ e sia $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ il piano proiettivo sul campo $\mathbb{K}$, con coordinate omogenee nel riferimento proiettivo standard date da $[x_0, x_1, x_2]$. Siano infine

$$\mathcal{A}_0 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_0 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2 \text{ carta affine con coordinate affini } \left(x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}\right),$$

$$\mathcal{A}_1 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_1 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2 \text{ carta affine con coordinate affini } \left(u = \frac{x_0}{x_1}, v = \frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$\mathcal{A}_2 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_2 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2 \text{ carta affine con coordinate affini } \left(s = \frac{x_0}{x_2}, t = \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Esercizio 1. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ la **conica proiettiva** di equazione cartesiana omogenea

$$\Gamma: \ F(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1 - x_0x_2 + x_0^2 = 0$$

(i) Classificare la conica proiettiva Γ, deducendo la sua **forma canonica proiettiva** in opportune coordinate $[z_0, z_1, z_2]$ a seconda di $\mathbb{K}$. Determinare l'eventuale **luogo singolare** di Γ.

(ii) Classificare il luogo geometrico $\Gamma_0 := \Gamma \cap \mathcal{A}_0$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_0$, stabilire se Γ_0 é una conica affine o meno, se é singolare o meno, e determinare l'equazione cartesiana di Γ_0.

(iii) Classificare il luogo geometrico $\Gamma_1 := \Gamma \cap \mathcal{A}_1$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_1$, stabilire se Γ_1 é una conica affine o meno, se é singolare o meno, e determinare l'equazione cartesiana di Γ_1.

(iv) Classificare il luogo geometrico $\Gamma_2 := \Gamma \cap \mathcal{A}_2$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_2$, stabilire se Γ_2 é una conica affine o meno, se é singolare o meno e determinare l'equazione cartesiana di Γ_2.

Esercizio 2. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ la **conica proiettiva** di equazione cartesiana omogenea

$$\Gamma: \ G(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 - x_0x_2 = 0$$

(i) Classificare la conica proiettiva Γ, deducendo la sua **forma canonica proiettiva** in opportune coordinate $[z_0, z_1, z_2]$ a seconda di $\mathbb{K}$.

(ii) Classificare la conica affine $\Gamma_0 := \Gamma \cap \mathcal{A}_0$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_0$, a seconda di $\mathbb{K}$, stabilendo se é **parabola** oppure **conica a centro** (e nel secondo caso, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se é **ellisse** oppure **iperbole**). Se Γ_0 parabola, determinare **vertice** V e **asse**; se invece é conica a centro, determinare **centro di simmetria** ed **asintoti**.

(iii) Classificare la conica affine $\Gamma_1 := \Gamma \cap \mathcal{A}_1$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_1$, a seconda di $\mathbb{K}$, stabilendo se é **parabola** oppure **conica a centro** (e nel secondo caso, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se é **ellisse** oppure **iperbole**). Se Γ_1 parabola, determinare **vertice** V e **asse**; se invece é conica a centro, determinare **centro di simmetria** ed **asintoti**.

(iv) Classificare la conica affine $\Gamma_2 := \Gamma \cap \mathcal{A}_2$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_2$, a seconda di $\mathbb{K}$, stabilendo se é **parabola** oppure **conica a centro** (e nel secondo caso, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se é **ellisse** oppure **iperbole**). Se Γ_2 parabola, determinare **vertice** V e **asse**; se invece é conica a centro, determinare **centro di simmetria** ed **asintoti**.

Esercizio 1

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$$F(\underline{x}):\ x_0 x_1 - x_0 x_2 + x_0^2 = 0$$

$$A_\Gamma = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1/2 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1/2 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A_\Gamma) = 0$

$rg(A_\Gamma) = 2$ perché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = -1/4 \neq 0$

$\Rightarrow \Gamma$ semplicemente degenere

forma canonica proiettiva su $\mathbb{C}$: $\boxed{z_0^2 + z_1^2 = 0 \quad (z_0 + i z_1)(z_0 - i z_1) = 0}$

f.c. proiettiva su $\mathbb{R}$: $\boxed{z_0^2 - z_1^2 = 0 \quad (z_0 - z_1)(z_0 + z_1) = 0}$

- $Sing(\Gamma) = \mathbb{P}(\ker(A_\Gamma))$

$$\ker(A_\Gamma) = \left\{ \begin{cases} x_0 + 1/2\, x_1 - 1/2\, x_2 = 0 \\ 1/2\, x_0 = 0 \\ -1/2\, x_0 = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \right\}$$
$$= Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow Sing(\Gamma) = \{[0,1,1]\}$

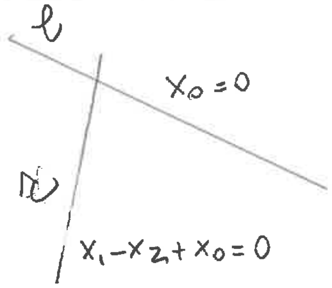
$\Rightarrow \Gamma$ è costituita da due rette incidenti in $P = [0,1,1]$

Visto che $x_0 \mid F(x_0, x_1, x_2) \Rightarrow$

$\Gamma:\ x_0(x_1 - x_2 + x_0) = 0 \rightarrow$ polinomio riducibile

$\Rightarrow \Gamma := \ell \cup r$ $\quad$ ℓ, r componenti irriducibili di Γ

$\boxed{\ell:\ x_0 = 0 \qquad r:\ x_1 - x_2 + x_0 = 0}$ rette proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



$\Rightarrow P = [0,1,1] = \ell \cap r$

$\boxed{\text{In } A_0}$ Γ_0 non è conica infatti $x = \frac{x_1}{x_0}$ $y = \frac{x_2}{x_0}$

$\boxed{\Gamma \cap A_0 := \Gamma_0 = r_0:\ x - y + 1 = 0}$ è solo retta affine in A_0

Perché ℓ che è retta impropria per A_0 (non visibile in A_0)

$\Rightarrow \Gamma$ ha come traccia in A_0 non una conica ma solo una retta

$\boxed{\text{In } A_1}$ $\quad u = \frac{x_0}{x_1} \quad v = \frac{x_2}{x_1}$

$\ell \cap A_1 := \ell_1 : \quad u = 0$

$r \cap A_1 := r_1 : \quad u - v + 1 = 0$

$\Rightarrow$ $A_1 \cap \Gamma' = \Gamma'_1$ è unione di due rette affini incidenti in

$P = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = (0,1)$

$\underline{v}_{\ell_1} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow [0,0,1]$ impropria per A_1 $\Rightarrow \underline{v}_{\ell_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_{r_1} : \begin{cases} x_0 - \cancel{x_2} + x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow [1,0,1] \Rightarrow \underline{v}_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{A_1 \cap \Gamma' := \Gamma'_1 = \ell_1 \cup r_1}$

conica traccia in A_1 di Γ'

$\boxed{\text{In } A_2}$ $\quad s = \frac{x_0}{x_2} \quad t = \frac{x_1}{x_2}$

$\ell \cap A_2 := \ell_2 : \quad s = 0$

$r \cap A_2 := r_2 : \quad s + t - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\Gamma'_2 := A_2 \cap \Gamma'$ conica traccia in A_2 di Γ'

è unione di due rette affini incidenti in $P = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = (0,1)$

$\underline{v}_{\ell_2} : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad [0,1,0] \Rightarrow \underline{v}_{\ell_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

impropria in A_2

$\underline{v}_{r_2} : \begin{cases} x_0 - x_2 + x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad [1,-1,0] \Rightarrow \underline{v}_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\Gamma'_2 = \ell_2 \cup r_2}$

Esercizio 2 $\quad \mathbb{P}^2(\mathbb{K}),\ \mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$

$\Gamma:\ x_0^2+x_1^2-x_0x_2=0$

$$A_\Gamma=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&1&0\\-1/2&0&0\end{pmatrix}$$

$$\det(A_\Gamma)\underset{\downarrow}{=}-\tfrac{1}{2}\det\begin{pmatrix}0&1\\-1/2&0\end{pmatrix}=-\tfrac12\cdot\left(\tfrac12\right)=-\tfrac14\neq0$$

Laplace III colonna

$\Rightarrow\ \Gamma\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ conica generale (non-singolare)

Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f. c. proiettiva $z_0^2+z_1^2+z_2^2=0$

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ visto che $P=[0,0,1]\in\Gamma\Rightarrow$ sicuramente Γ è a punti reali

$\Rightarrow$ f. c. proiettiva $z_0^2+z_1^2-z_2^2=0$

In A_0 $\quad \Gamma_0:\ 1+x^2-y=0\ \Rightarrow\ y=x^2+1$

$x=\frac{x_1}{x_0},\ y=\frac{x_2}{x_0}$

Γ_0 è PARABOLA in $A_0=\mathbb{A}^2_{x,y}$

Infatti

Modo 1

$$A_{\Gamma_0}=\begin{pmatrix}1&0&-1/2\\0&\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}}\\-1/2& & \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $Q_{A_{\Gamma_0}}$

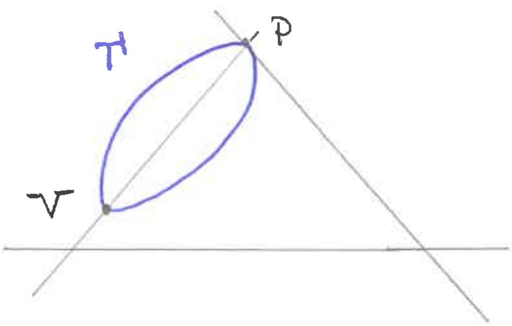
$rg(A_{\Gamma_0})=3$

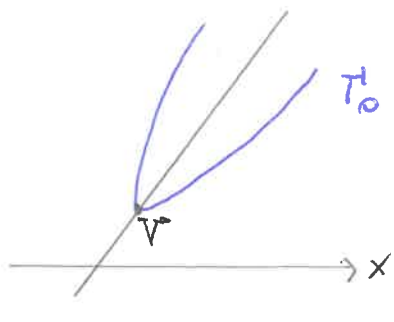
$rg(Q_{A_{\Gamma_0}})=1$

$\Rightarrow\ \Gamma_0$ parabola

Modo 2 punti impropri di Γ_0: $\begin{cases}\Gamma\\x_0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2=0\\x_0=0\end{cases}$

$\Rightarrow\ \Gamma$ è tg. $\{x_0=0\}$ in $P=[0,0,1]=(\Gamma_0)_\infty$





Se $\mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \equiv \mathbb{E}^2(\mathbb{K})$ con

$\langle , \rangle$ → hermitiano standard se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
→ scalare standard se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Asse parabola: retta per V vertice e con vettore direttore $(\Gamma_0)_\infty = [0,0,1]$ cioè $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rette perpendicolari asse sono con vettore direttore $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cioè // asse x

Pongo $\begin{cases} y = k \\ \Gamma_0 \end{cases}$ cerco valore di k per cui $y = k$ tg. a $\Gamma_0 \Rightarrow$ ascissa di V

$$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = k \\ x^2 + (1-k) = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$\Delta = 0 - 4(1-k) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k=1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \boxed{V = (0,1)}$$

In A_1 $\quad u = \dfrac{x_0}{x_1} \quad v = \dfrac{x_2}{x_1}$

$\Gamma_1 : u^2 + 1 - uv = 0$

$$A_{\Gamma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} rg(A_{\Gamma_1}) = 3 \\ rg(Q_{A_{\Gamma_1}}) = 2 \end{array}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow \Gamma_1$ conica affine generale a centro STOP

se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ poiché $\det(Q_{A_{\Gamma_1}}) = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \Gamma_1$ iperbole

Motivo $(\Gamma_1)_\infty := \begin{cases} \Gamma \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

Se fosse $x_2 = 0 \Rightarrow x_0^2 = 0$ ⨳ $\Rightarrow$ pongo $\dfrac{x_0}{x_2} = t \Rightarrow t^2 - t = 0$

$\downarrow$

$\Delta = +1 - 0 > 0$

e $\boxed{\Delta = -4 \det(Q_{A_{\Gamma_1}})}$

$\Rightarrow$ 2 soluzioni distinte

$\Downarrow$

iperbole

Centro di simmetria se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ ③

$C = (u_0, v_0) \in \mathbb{A}^2$ di simmetria $\Leftrightarrow$

$\forall\, Q \in \Gamma_1 \Rightarrow \sigma_C(Q) \in \Gamma_1$ con $\sigma_C =$ simmetria rispetto a C

$\Leftrightarrow$ (*) $\boxed{\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{C\sigma_C(Q)}}$ $\Leftrightarrow$

$Q = (u, v)$ $\quad C = (u_0, v_0)$ $\quad \sigma_C(Q) = (u', v')$

(*) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u = 2u_0 - u' \\ v = 2v_0 - v' \end{cases} \quad \underbrace{\text{è affinità}}_{\varphi}}$

Perciò C centro simmetria $\Leftrightarrow$ detto $\Gamma_1 : \underline{f(u,v) = u^2 - uv + 1 = 0}$

$$\varphi(f(u,v)) = f(u', v') = 0$$

$$f(u,v) = f(2u_0 - u', 2v_0 - v') =$$

$$= (2u_0 - u')^2 - (2u_0 - u')(2v_0 - v') + 1$$

$$= 4u_0^2 - 4u_0u' + (u')^2 - (4u_0v_0 - 2u_0v' - 2v_0u' + u'v') + 1$$

$$= (u')^2 - u'v' - 2u'(2u_0 - v_0) - 2u_0v'$$
$$+ (1 + 4u_0^2 - 4u_0v_0)$$

Affinché coincida con $f(u,v) = 0$

$$\begin{cases} -2(2u_0 - v_0) = 0 \\ -2u_0 = 0 \\ 1 + 4u_0^2 - 4u_0v_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2u_0 - v_0) = 0 \\ -2u_0 = 0 \\ 4u_0^2 - 4u_0v_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_0 - v_0 = 0 \\ u_0 = 0 \\ u_0(u_0 - 2v_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_0 - v_0 = 0 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Ma è proprio $\quad A_{\Gamma_1} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} 0 + u - \frac{1}{2}v = 0 \\ 0 - \frac{1}{2}u + 0v = 0 \end{cases}$

rg = 2 $\exists!$ sol.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2u - v = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

Centro di simmetria

$$\boxed{C = (0,0)}$$

Asintoti

Rette per C e per i punti impropri

$$(T'_1)_\infty : \begin{cases} T' \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0(x_0 - x_2) = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

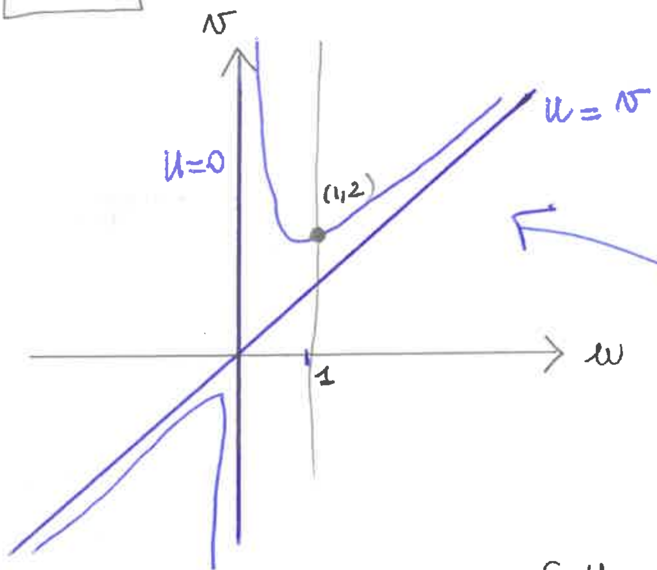
$$P_1 = [0,0,1] \qquad P_2 = [1,0,1]$$

$$(T'_1)_\infty = \{P_1\} \cup \{P_2\}$$

$\Rightarrow$ Asintoti: rette per C con vettori direttori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u = 0} \qquad \boxed{u = v}$$



siccome la retta $u = 1$ è t.c. $\begin{cases} u = 1 \\ T'_1 \end{cases} \iff \begin{cases} u = 1 \\ 1 + 1 - v = 0 \end{cases}$

è t.c. $T'_1 \cap \{u = 1\} = (1,2)$

$\Rightarrow T'_1$ è disegnata così

$\boxed{\text{In } A_2}$

$$s = \frac{x_0}{x_2} \qquad t = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\Gamma_2 : \quad s^2 + t^2 - s = 0$$

$$A_{\Gamma_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} rg(A_{\Gamma_2}) = 3 \\ rg(Q_{\Gamma_2}) = 2 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ Γ_2 conica a centro STOP

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\det(Q_{A_{\Gamma_2}}) = 1 > 0 \Rightarrow \Gamma_2$ ellisse

Infatti $(\Gamma_2)_\infty := \begin{cases} \Gamma \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_0 x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Non può essere $x_1 = 0$ altrimenti pure $x_0 = 0$ #

$\Rightarrow \frac{x_0}{x_1} = t \qquad t^2 + 1 = 0 \qquad \underset{-4\det(Q_{A_{\Gamma_2}})}{\underset{\parallel}{\Delta}} = 0 - 4 < 0$

$\Rightarrow \nexists$ sol. reali

$\Rightarrow$ la conica Γ_2 non ha punti impropri reali

$\Rightarrow$ come conica reale è al finito (per questo ellisse)

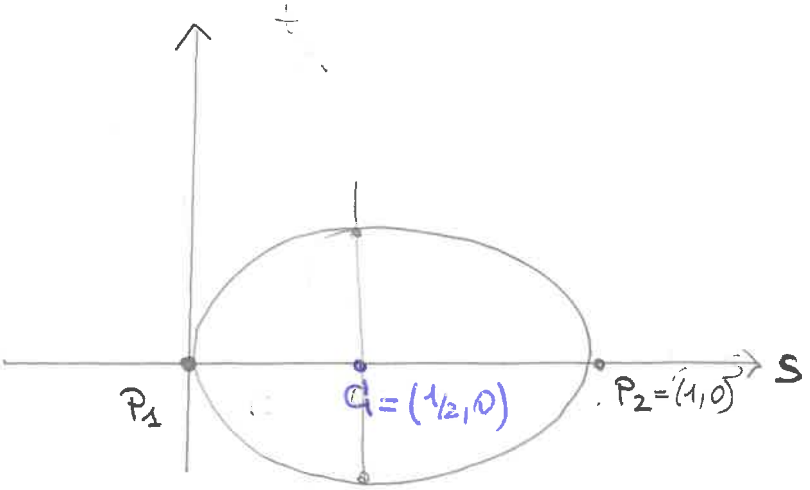
ma su $\mathbb{C}$ falso

Centro di simmetria (per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$)

Come prima

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} + s = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)}$$



- $\Gamma'_2 \cap \{t=0\} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ s^2-s=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ s(s-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} P_1=(0,0)=O \\ P_2=(1,0) \end{array}$
- $\Gamma'_2 \cap \{s=\frac{1}{2}\} \Rightarrow \begin{cases} s=1/2 \\ t^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=1/2 \\ t^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} Q_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ Q_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \end{array}$

Ma infatti ...

$\Gamma'_1: \quad \left(s-\frac{1}{2}\right)^2+t^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow$ Γ'_1 in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ sarebbe circonf. di centro $C=(1/2,0)$ e raggio $R=1/2$