

Osservazione per evitare uso "Taylor" in 2 involte ministe
in Esercizio 1-(i) di Esercitazione 11 (14 Maggio 25)

(1)

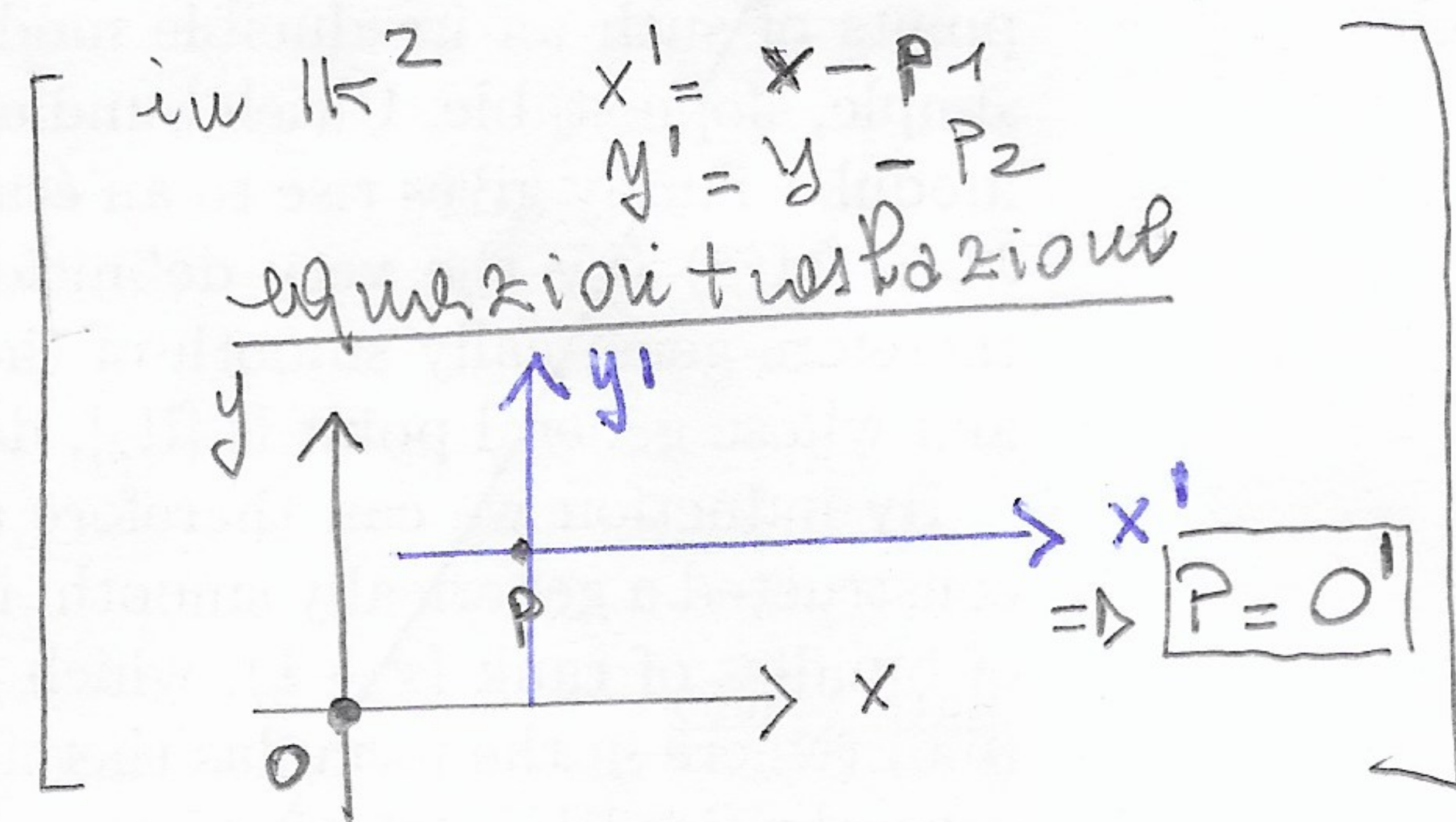
Se $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{K}^2$ con (x, y) coordinate

Poniamo

$$x' = x - P_1$$

$$y' = y - P_2$$

$$\begin{aligned} x - P_1 = 0 &\Leftrightarrow x = P_1 \Leftrightarrow x' = 0 \\ y - P_2 = 0 &\Leftrightarrow y = P_2 \Leftrightarrow y' = 0 \end{aligned}$$



Dal punto vista algebrico

$$\begin{aligned} T_{(x-P_1, y-P_2)}: \mathbb{K}[x, y] &\longrightarrow \mathbb{K}[x', y'] \\ x &\longrightarrow x - P_1 = x' \\ y &\longrightarrow y - P_2 = y' \\ f(x, y) &\longrightarrow f(x - P_1, y - P_2) = \hat{f}(x', y') \end{aligned}$$

• $T_{(x-P_1, y-P_2)}$ è isomorfismo d'anelli che conserva grado monomi

$$\begin{aligned} (i) \quad T_{(x-P_1, y-P_2)} (f(x, y) \pm g(x, y)) &= f(x - P_1, y - P_2) \pm g(x - P_1, y - P_2) \\ &= T_{(x-P_1, y-P_2)} (f(x, y)) \pm T_{(x-P_1, y-P_2)} (g(x, y)) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ omomorfismo d'anelli

(ii) $T_{(x-P_1, y-P_2)}$ è suriettivo in fatti

$$\begin{aligned} x' &= T_{(x-P_1, y-P_2)}(x), & x &\in \mathbb{K}[x, y] \\ y' &= T_{(x-P_1, y-P_2)}(y), & y &\in \mathbb{K}[x, y] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{generatori di} \\ \mathbb{K}[x, y] \end{array}$$

$\Rightarrow$ si estende per $\mathbb{K}$ -linearità a $\forall f(x', y') \in \mathbb{K}[x', y']$

(iii) $T_{(x-P_1, y-P_2)}$ è iniettivo

$$f(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \in \mathbb{K}[x, y]$$

$$\begin{aligned} T_{(x-P_1, y-P_2)}(f(x, y)) = 0 &\Leftrightarrow a_{00} + a_{10}(x-P_1) + a_{01}(y-P_2) + a_{20}(x-P_1)^2 + a_{11}(x-P_1)(y-P_2) \\ &\quad + a_{02}(y-P_2)^2 + \dots = a_{00} + a_{10}x' + a_{01}y' + a_{20}(x')^2 + a_{11}x'y' + a_{02}(y')^2 + \dots \equiv 0 \end{aligned}$$

$$\text{Per identità polinomiale in } \mathbb{K}[x', y'] \Leftrightarrow \begin{cases} a_{00} = 0 \\ a_{10} = 0 \\ a_{01} = 0 \\ a_{20} = 0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{02} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x, y) \equiv 0 \text{ in } \mathbb{K}[x, y]$$

Allora

(2)

$$f(x, y) \in K[x, y] \text{ e t.c. } f(p_1, p_2) = 0 \Leftrightarrow \hat{f}(0, 0) = 0$$

$$\hat{f} \in \bigcap_{K[x', y']} K[x', y']$$

Perciò

$$\omega'_{(0,0)} : K[x', y'] \longrightarrow K$$

$$\hat{f}(x', y') \longrightarrow \omega'_{(0,0)}(\hat{f}(x', y')) = \hat{f}(0, 0), \quad \forall \hat{f}(x', y') \in \bigcap_{K[x', y']} K[x', y']$$

Quindi

$$\hat{f}(x', y') \in \ker(\omega'_{(0,0)}) \Leftrightarrow \hat{f}(0, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\hat{f}(x', y') \text{ è polinomio termine noto} \Leftrightarrow$$

$$(*) \quad \hat{f}(x', y') = a_{10}x' + a_{01}y' + a_{20}(x')^2 + a_{11}x'y' + a_{02}(y')^2 + \dots$$

Ma

$$K[x, y] \xrightarrow[\cong]{T_{(x-p_1, y-p_2)}} K[x', y'] \xrightarrow{\omega'_{(0,0)}} K$$

$$\searrow \omega_{(p_1, p_2)}(f(x, y))$$

cioè

$$\omega_{(p_1, p_2)} = \omega'_{(0,0)} \circ T_{(x-p_1, y-p_2)}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 morf. suriettivo $\downarrow$ isomorfismo
 sullo stesso $\downarrow$ quelli

$$f(x, y) \in \ker(\omega_{(p_1, p_2)}) \Leftrightarrow T_{(x-p_1, y-p_2)}(f(x, y)) = \hat{f}(x', y') \in \ker(\omega'_{(0,0)})$$

Ma allora $x' = x - p_1, \quad y' = y - p_2$ e (*) ci dice

$$f(x, y) = a_{10}(x-p_1) + a_{01}(y-p_2) + a_{20}(x-p_1)^2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow f(x, y) \in (x-p_1, y-p_2) = M_P \quad \text{io lo so max in } K[x, y]$$

In $K[x', y']$ abbiamo $M_{0'} = (x', y')$ che è ovviamente

max perché

$$\frac{K[x', y']}{(x', y')} \cong K$$