Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale, a.a. 2024-2025
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (M-Z), a.a. 2024-2025

Esercizi di riepilogo del corso di Geometria

I settimana

Esercizio 1 (vedasi *Esercizio* a pag. 2 delle **Dispense - Capitolo 1: Spazi vettoriali**) Sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, si consideri l'operazione $\oplus$ cosi' definita:

$$x \oplus y := x + 2y, \ \ \forall x,\, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Dire se l'operazione $\oplus$ ammette un *elemento neutro*, cioe' se esiste un elemento $e \in \mathbb{R}$ tale che

$$e \oplus x = x \oplus e = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R};$$

(ii) Dire se l'operazione $\oplus$ e' associativa, cioe' se e' vero che per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$$

(iii) Dire se l'operazione $\oplus$ e' commutativa, cioe' se e' vero che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

(iv) Considerata la *struttura algebrica* $(\mathbb{R}, \oplus, \ \cdot)$, dove l'*operazione interna* e' $\oplus$ sopra definita mentre l'*operazione esterna* $\cdot$ e' l'usuale prodotto tra numeri reali, i.e.

$$a \cdot x = ax, \ \forall\, a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},$$

verificare che $(\mathbb{R}, \oplus, \ \cdot)$ non e' uno spazio vettoriale.

Esercizio 2 Nello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ siano dati i vettori

$$\mathbf{u_1} = (1,0,1,0), \ \ \mathbf{u_2} = (0,1,0,1), \ \ \mathbf{u_3} = (2,3,2,4).$$

(i) Calcolare le *componenti* del vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ definito come *combinazione lineare*, con *coefficienti (o pesi)* rispettivamente $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_3 = 1 \in \mathbb{R}$, dei vettori $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ ordinatamente dati, cioe':

$$\mathbf{u} := 3 \cdot \mathbf{u_1} - 2 \cdot \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3};$$

(ii) Denotato con $\mathbf{0}$ il vettore nullo di $\mathbb{R}^4$, stabilire se possono esistere tre scalari (o pesi) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli per cui sussista l'eguaglianza vettoriale

$$a_1 \cdot \mathbf{u_1} + a_2 \cdot \mathbf{u_2} + a_3 \cdot \mathbf{u_3} = \mathbf{0};$$

(iii) Se invece consideriamo il vettore $\mathbf{v} := (2,3,2,3) \in \mathbb{R}^4$, stabilire se possono esistere tre scalari (o pesi) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ non tutti nulli per cui sussista l'eguaglianza vettoriale

$$(*) \quad a_1 \cdot \mathbf{u_1} + a_2 \cdot \mathbf{u_2} + a_3 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0};$$

(iv) In caso di risposta affermativa al punto (iii), se si prende una qualsiasi terna non-nulla di scalari $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ che soddisfi l'equazione vettoriale $(*)$, con $a_1 = 2$, scrivere il vettore $\mathbf{u_1}$ come *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{u_2}$ e $\mathbf{v}$ ai sensi dell'*Esercizio* a pag. 5 delle **Dispense - Capitolo 1: Spazi vettoriali**.

Esercizio 3 Sia dato $V = M(2,2)$ lo spazio vettoriale delle matrici con $m = 2$ righe e $n = 2$ colonne. Si consideri il sottoinsieme

$$U_1 := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in V \mid a_{1,2} - a_{2,1} = 0 \right\}.$$

(i) Dimostrare che U_1 e' un sottospazio di V;
(ii) Dato invece il sottoinsieme

$$U_2 := \left\{ A = \left(\begin{array}{cc} a_{1,2} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{array} \right) \in V \mid a_{1,2} - a_{2,1} = 1 \right\},$$

vale la stessa asserzione come in (i) anche per il sottoinsieme U_2?
(iii) Considerato ora il sottoinsieme

$$U_3 := \left\{ A = \left(\begin{array}{cc} 0 & b \\ -b & 0 \end{array} \right) \in V \mid b \in \mathbb{R} \right\},$$

dimostrare che U_3 e' un sottospazio di V.
(iv) E' vero che $U_1 \cap U_3$ e' un sottospazio di V? In caso di risposta affermativa, descrivere gli elementi del sottospazio $U_1 \cap U_3$.

Esercizio 4 Si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$ e si consideri il vettore $\mathbf{x} = (5, 10) \in \mathbb{R}^2$.
(i) Dire se e' possibile poter esprimere il vettore $\mathbf{x}$ come *combinazione lineare* dei vettori nel sottoinsieme $S := \{\mathbf{u_1} = (1, 2),\ \mathbf{u_2} = (2, 4)\}$ di V ed, in caso di risposta affermativa, stabilire in quanti modi possibili cio' puo' avvenire;
(ii) Stessi quesiti, ma stavolta utilizzando il sottoinsieme $S := \{\mathbf{v_1} = (1, 4),\ \mathbf{v_2} = (1, 5)\}$;
(iii) Stessi quesiti ma stavolta utilizzando il sottoinsieme $S := \{\mathbf{w} = (1, 3)\}$;
(iv) Stessi quesiti ma stavolta utilizzando il sottoinsieme

$$S := \{\mathbf{e_1} = (1, 0),\ \mathbf{e_2} = (0, 1),\ \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = (1, 1)\}.$$

Esercizio 5 Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$. Si prendano i vettori (equivalentemente polinomi) $t,\ t^2 \in V$.
(i) Dimostrare che il sottoinsieme di V formato da $Span\{t,\ t^2\}$ e' piu' precisamente un sottospazio di V;
(ii) Stabilire se il sottospazio $Span\{t,\ t^2\}$ e' un sottospazio *banale* di V;
(iii) Nel caso in cui in (ii), il sottospazio $Span\{t,\ t^2\}$ non risulti essere un sottospazio banale di V, esibire almeno un vettore (o polinomio) in $Span\{t,\ t^2\}$ che dimostri che $Span\{t,\ t^2\}$ non e' *sottospazio nullo* di V;
(iv) Analogamente, nel caso in cui in (ii), il sottospazio $Span\{t,\ t^2\}$ non risulti essere un sottospazio banale di V, esibire almeno un vettore (o polinomio) in V che dimostri che l'inclusione $Span\{t,\ t^2\} \subset V$ e' un' *inclusione stretta (o propria)*, cioe' che $Span\{t,\ t^2\}$ risulti essere un *sottospazio proprio (non-nullo)* di V. (**Hint:** in altri termini si tratta semplicemente di esibire almeno un vettore (o polinomio) che stia in V ma che non sta in $Span\{t,\ t^2\}$).
(v) **Più difficile**: E' vero che

$$Span\{t,\ t^2\} = Span\{2t + 3t^2,\ 7t - t^2\}?$$

II settimana

Esercizio 1 Sia $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'indeterminata t e di grado al piu' 2. Sia dato il sistema di vettori (equivalentemente polinomi):

$$S := \{1-t,\ 1+t,\ 1-t^2,\ 1+t^2, t-t^2,\ t+t^2\}.$$

(i) Stabilire se S e' un sistema di vettori linearmente indipendenti (equivalentemente *libero*).
(ii) In caso S risulti un sistema *legato*, estrarre da S un sottosistema S' di vettori linearmente indipendenti (equivalentemente con S' libero) che sia anche un sistema di generatori per lo spazio vettoriale V (in altri termini vogliamo estrarre da S una *base* S' per V).
(iii) Determinare i *pesi (o coefficienti)* del vettore (cioe' del polinomio)

$$p(t) := 10 - 7t - t^2 \in V$$

quando $p(t)$ si scrive come combinazione lineare dei vettori selezionati nel sottosistema (o base) S' determinato al punto (ii).
(iv) Determinare invece almeno due espressioni differenti di $p(t)$ quando esso si scrive come combinazione lineare dei vettori (o polinomi) nel sistema di generatori S.

Esercizio 2 Sia come sopra $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'indeterminata t e di grado al piu' 2. Si consideri il sottoinsieme W di V definito da:

$$W := \{p(t) \in V \mid p(2) = 0\} \subset V.$$

(i) Dimostrare che W e' un sottospazio vettoriale proprio e non-banale di V.
(ii) Determinare un sistema di generatori S che sia anche libero per il sottospazio vettoriale W, cioe' che sia una *base* per W (in altri termini $W = Span(S)$ dove S libero).
(iii) Estendere il sistema di vettori S determinato al punto (ii) ad un sistema $\mathcal{B}$ libero e di generatori per lo spazio vettoriale V (cioe' estendere S ad una base per tutto V).
(iv) Scrivere il polinomio $t \in V \setminus W$ come combinazione lineare dei vettori (o polinomi) nella base $\mathcal{B}$ trovato al punto (iii), indicando i *pesi* della combinazione lineare trovata.

Esercizio 3 Sia $V = \mathcal{M}(2,2)$ lo spazio vettoriale delle matrici con $m = 2$-rige e $n = 2$-colonne. Nell'**Esercizio 3**-(i) di **Settimana I** avete dimostrato che

$$U_1 := \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in V \mid a_{1,2} - a_{2,1} = 0 \right\}$$

e' un sottospazio di V.
(i) Determinare un sistema S libero e di generatori per U_1, cioe' una base per U_1, indicando precisamente quanti vettori (equivalentemente matrici) contiene S.
(ii) Dato il vettore (equivalentemente la matrice)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in V$$

verificare che $A \in U_1$.
(iii) Scrivere A come combinazione lineare rispetto al sistema di vettori S trovato in (i). Quante scritture sono possibili?
(iv) Estendere S ad un sistema $\mathcal{B}$ libero e di generatori per V (cioe' ad una base per V) e scrivere la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in V \setminus U_1$$

come combinazione lineare dei vettori (equivalentemente delle matrici) della base $\mathcal{B}$.

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ siano assegnati i seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1), \ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \ \mathbf{v}_3 = (1, -1, 3).$$

Si consideri inoltre il vettore $\mathbf{w} = (1, 0, 2)$.
(i) Scrivere le componenti del vettore arbitrario appartenente a $W := Span(\mathbf{w}) \subset \mathbb{R}^3$.
(ii) Verificare che

$$S := \{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3\}$$

e' una base per $\mathbb{R}^3$.
(iii) Scrivere il vettore $\mathbf{w}$ come combinazione lineare dei vettori della base S.
(iv) Considerando

$$\mathbf{u} := \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

scrivere i pesi del vettore $\mathbf{u}$ quando esso si esprime come combinazione lineare dei *vettori canonici* $\{\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3\}$ (in altri termini si chiede di determinare le componenti del vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ sopra descritto).

Esercizio 5 Come nell'**Esercizio 4**, si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ ed i vettori:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1), \ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1), \ \mathbf{v}_3 = (1, -1, 3).$$

(i) Determinare la *dimensione* di $Span\{\mathbf{v}_1\}$ e descrivere due basi differenti di questo sottospazio.
(ii) Determinare la *dimensione* di $Span\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2\}$ e descrivere due basi differenti di questo sottospazio.
(iii) Determinare la *dimensione* di $Span\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3\}$ e descrivere due basi differenti di questo sottospazio.
(iv) E' possibile scrivere i vettori canonici $\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$ come combinazioni lineari del sistema $S_1 = \{\mathbf{v}_1\}$? Stesso quesito ma con il sistema $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2\}$? Stesso quesito ma con il sistema $S_3 = \{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \mathbf{v}_3\}$? Quando la risposta e' affermativa, determinare esplicitamente i pesi delle combinazioni lineari che esprimono, rispettivamente, i vettori canonici $\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$.

III settimana

Esercizio 1 Nello spazio vettoriale numerico $V = \mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale W definito da

$$W := Span(\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1),\ \mathbf{w}_2 = (0,0,0,1),\ \mathbf{w}_3 = (1,1,1,2),\ \mathbf{w}_4 = (3,3,3,4)).$$

(i) Estrarre dal sistema di generatori $\mathcal{W} := \{\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \mathbf{w}_3,\ \mathbf{w}_4\}$ di W una base $\mathcal{B}_W$ del sottospazio W e determinare $\dim(W)$.
(ii) Estendere la base $\mathcal{B}_W$ determinata al punto (ii) ad una base per tutto V.
(iii) Determinare un sottospazio vettoriale $U \subset V$, esibendo esplicitamente una sua base $\mathcal{B}_U$ di modo tale che risulti $V = W \oplus U$.
(iv) Scrivere il vettore canonico $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U$ di V. Quante scritture sono possibili?

Esercizio 2 (i) Al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, calcolare una base e la dimensione per il sottospazio W_k di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$W_k := Span((1,1,1),\ (1,1,k-2),\ (0,1,1)).$$

(ii) Dato $U := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0\}$, verificare che e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
(iii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare una base del sottospazio $U \cap W_k$.
(iv) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare $\dim(W_k + U)$.

Esercizio 3 Sia $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, nell'indeterminata t e di grado al piu' 3. Si consideri il sottoinsieme W di V definito da:

$$W := \{p(t) \in V \mid p(1) = 0\ \ e\ contemporaneamente\ \ p(0) = 0\} \subset V.$$

(i) Dimostrare che W e' un sottospazio vettoriale di V.
(ii) Determinare una base $\mathcal{B}_W$ calcolando quindi $\dim(W)$.
(iii) Sia ora

$$U := \{q(t) \in V \mid (t^2 - 1)\ \ divide\ \ q(t)\} \subset V.$$

Verificare che U e' un sottospazio vettoriale di V e calcolarne la dimensione.
(iv) Determinare $\dim(W \cap U)$ e $\dim(W + U)$.

IV settimana

Esercizio 1 (Vedere Esercizi a pg. 19-20 di Capitolo 2 dispense) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale U definito da

$$U := Span(\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 1),\ \mathbf{u}_2 = (1, 2, 0, 2),\ \mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, 3)).$$

Al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, sia W_h invece il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$W_h := Span((h, -1, 1, 1),\ (-1, -1, 1, 3),\ (-1, -2, 2, 4)).$$

(i) Utilizzando l'algoritmo di Gauss sulla matrice $A \in \mathcal{M}(3, 4)$ che ha come righe i generatori di U, dimostrare che $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$ formano una base per U.
(ii) Determinare una base di un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$ tale che si abbia $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.
(iii) Per quale valore del parametro $h \in \mathbb{R}$ si ha che W_h coincide con il sottospazio $Z := Span((1, -2, 2, 0),\ (-1, 0, 0, 2))$?

Esercizio 2 (i) Al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, stabilire il rango della matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Calcolare $\det(A_k)$ verificando che si ottiene un polinomio $p(k)$ quadratico in k.
(iii) Che relazione c'e' tra gli zeri (o soluzioni) dell'equazione $p(k) = 0$ ed i valori trovati al punto (i)? Per ogni valore k_0 soluzione della equazione polinomiale $p(k) = 0$, la corrispondente matrice A_{k_0} risulta invertibile? (**Hint**: ricordare che per matrici quadrate, essere invertibile e' equivalente ad essere di rango massimo)

Esercizio 3 (Vedasi Esercizio pg. 28 Dispense cap. 2) Calcolare il determinante della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 12 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(**Hint**: ricordare come le operazioni elementari modificano il valore del determinante di una matrice, ridurre a scala A e solo alla fine utilizzare lo sviluppo di Laplace per calcolare il determinante della ridotta a scala di A e risalire dunque al valore del determinante di A)