Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 9 (14 Maggio 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, munito di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si considerino i punti

$$P_0 = [1, 2, -1],\ P_1 = [0, 1, 1],\ P_2 = [2, 1, 5],\ P_3 = [1, -2 - 5].$$

(i) Stabilire se la quaterna data é una quaterna di punti in **posizione generale** in $\mathbb{P}^2$.
(ii) In caso di risposta negativa al punto (i), determinare **equazioni parametriche omogenee** ed **equazioni cartesiane omogenee** del **sottospazio congiungente** $r := \mathcal{L}(P_0, P_1, P_2, P_3)$, i.e. il sottospazio proiettivo di dimensione minima contenente la quaterna di punti data.
(iii) Detta $s \subset \mathbb{P}^2$ la retta proiettiva di equazione cartesiana omogenea

$$s: \ \ x_1 - x_2 = 0,$$

stabilire se r e s sono sottospazi proiettivi in **posizione generale** in $\mathbb{P}^2$.
(iv) Denotata con $\mathcal{A}_0 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_0 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2$ la **carta affine fondamentale** di $\mathbb{P}^2$, determinare equazioni cartesiane dei **sottospazi affini** r_0 e s_0 in $\mathcal{A}_0$ che sono **traccia** dei sottospazi proiettivi r e s in $\mathcal{A}_0$, deducendo inoltre la mutua posizione di r_0 e s_0 in $\mathcal{A}_0$.
(v) Considerate le carte affini $\mathcal{A}_1 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_1 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2$ ed $\mathcal{A}_2 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_2 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2$ di $\mathbb{P}^2$, determinare equazioni cartesiane dei **sottospazi affini** che sono traccia di r e s in entrambe le carte affini, deducendo la mutua posizione dei sottospazi affini determinati in entrambe le carte affini.

Esercizio 2. Sia dato lo spazio affine $\mathbb{A}^3 := \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, munito di riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ che fornisce coordinate affini (x, y, z). Sia dato il piano affine $\pi: \ 2x + 3y + z = 1$ e la retta affine r passante per il punto $P = (1, 0, 1)$ e con vettore direttore $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.
(i) Indentificando $\mathbb{A}^3$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3$ attraverso l'inclusione naturale

$$(x, y, z) \hookrightarrow [1, x, y, z],$$

determinare il **luogo dei punti impropri** del piano affine π in $\mathcal{A}_0$ ed il **punto improprio** della retta affine r in $\mathcal{A}_0 = \mathbb{A}^3$, deducendo la mutua posizione di π e r in $\mathbb{A}^3$.
(ii) Preso $Q = [0, 1, 0 - 2] \in \mathbb{P}^3$, dedurre che Q é un sottospazio proiettivo **sghembo** al piano $\mathcal{H}_1 : x_1 = 0$ e, denotata con π_Q la **proiezione di centro Q sul piano $\mathcal{H}_1$**, determinare le equazioni omogenee della proiezione $\pi_Q([x_0, x_1, x_2, x_3])$ ed il luogo in $\mathbb{P}^3$ dove π_Q non é definita come applicazione a valori in $\mathcal{H}_1$. Detto $V = \mathbb{R}^4$ che fornisce $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^3$, relazionare π_Q con un'opportuna proiezione canonica su uno **spazio vettoriale quoziente** V/W.
(iii) Detta $\overline{r}$ la retta proiettiva ottenuta come **completamento proeittivo** della retta affine r, determinare equazioni cartesiane omogenee di $\pi_Q(\overline{r}) \subset \mathcal{H}_1$ e di $\pi_Q(\ell) \subset \mathcal{H}_1$, dove ℓ la retta proiettiva di equazioni cartesiane omogenee $\ell: \ x_3 = 0 = x_1 - x_2$.
(iv) Considerato lo **spazio proiettivo duale** $(\mathbb{P}^3)^* := \mathbb{P}(V^*)$, descrivere $\pi_Q(\ell)$ come proiettificato di un opportuno **sottospazio annullatore**, dando interpretazione geometrica di tale rappresentazione.
(v) Dopo aver verificato che $\pi_Q(\ell)$ é una retta di $\mathbb{P}^3$ ottenuta come $\pi_Q(\ell) = \mathcal{H}_1 \cap \alpha$, per α piano opportuno di $\mathbb{P}^3$, determinare le coordinate omogenee in $(\mathbb{P}^3)^*$ dei punti P_α e $P_{\mathcal{H}_1}$ corrispondenti ai piani α e $\mathcal{H}_1$ di $\mathbb{P}^3$ e determinare equazioni cartesiane omogenee in $(\mathbb{P}^3)^*$ della retta $\mathcal{L}(P_\alpha,\ P_{\mathcal{H}_1})$, intepretandola come opportuna **famiglia di piani** di $\mathbb{P}^3$