Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1
Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 9 (29 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Dopo aver verificato che le relazioni $\sim$ sotto definite sono relazioni di equivalenza sull'insieme X dato, determinare esplicitamente le classi di $\sim$-equivalenza degli elementi di X ed un esplicito modello dell'insieme quoziente $X/\sim$.

(i) $X := \mathbb{R}^2$ come **piano affine**, con riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ che determina coordinate affini (x, y) per i suoi punti, e $\sim$ la seguente relazione sui punti di $X = \mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (x_2, y_2) = (x_1 + \lambda,\ y_1 - \lambda).$$

(ii) $V = \mathbb{R}^2$ come **spazio vettoriale**, con base canonica $\mathcal{E}$ e consideriamo $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0,0)\}$ sul quale si introduce la relazione $\sim$ relazione di **proporzionalitá** tra vettori non nulli:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \;\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ t.c. } \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}.$$

(iii) $\mathbb{R}^2$ come **piano affine**, con riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ che determina coordinate affini (x, y) per i suoi punti, e consideriamo $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0,0)\}$ sul quale si introduce la relazione $\sim$ relazione:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_{>0} \text{ t.c. } (x_2, y_2) = (\lambda x_1,\ \lambda^{-1} y_1).$$

(iv) $X := \mathbb{R}$ come **retta affine**, con riferimento affine $RA(O, \mathbf{e})$ che determina coordinata affine x per i suoi punti, e $\sim$ la seguente relazione sui punti di $X = \mathbb{R}$:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2. Utilizzando le congruenze su $\mathbb{Z}$, risolvere i seguenti quesiti su **divisibilitá fra interi** (testo [Piacentini-Cattaneo pp. 72-73]). Sia

$$n = a_n a_{n-1} \cdots a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i (10)^i \in \mathbb{Z}$$

(i) (**Criterio di divisibilitá**) Il numero intero n é divisibile per 3 (equiv. per 9) se e solo se la somma delle sue cifre $\sum_{i=0}^{n} a_i$ é divisibile per 3 (equiv. per 9);

(ii) (**Criterio di divisibilitá**) Il numero intero n é divisibile per 2 (equiv. per 5) se e solo se l'ultima sua cifra a destra, i.e. a_0, é divisibile per 2 (equiv. per 5);

(iii) (**Criterio di divisibilitá**) Il numero intero n é divisibile per 2^k, $k \geq 2$, se e solo se 2^k divide il numero costituito dalle ultime k cifre di n, i.e. $a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_0$;

(iv) (**Criterio di divisibilitá**) Il numero intero n é divisibile per 11 se e solo se il numero $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$ é divisibile per 11.

(v) Trovare il resto della divisione per 10 del numero 43816^{20321}.

Esercizio 3. Stabilire quali fra le seguenti congruenze lineari della forma $ax \equiv b \pmod{m}$ é compatibile e, per quelle che risultano compatibili, determinare tutte e sole le **soluzioni incongruenti** $\pmod{m}$.

(i) $9x \equiv 12 \pmod{18}$;
(ii) $15x \equiv 27 \pmod{39}$;
(iii) $4x \equiv 8 \pmod{14}$

Esercizio 4. Dimostrare che:
(i) dato $n \in \mathbb{Z}$ allora n^2 é congruo o a 0 oppure a 1 (mod 4);
(ii) se $n \in \mathbb{Z}$ é dispari, allora $(n^2 - 1) \equiv 0 \pmod 8$.

Esercizio 5. (i) Dire per quali dei seguenti numeri naturali $n \in \mathbb{N}$, gli anelli quozienti $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}); +, \cdot)$ siano **campi**, siano **domini di integritá**, ammettano **divisori dello zero**, ammettano **elementi nilpotenti**: $n = 11, 15, 27, 45, 100, 121, 127, 143$.

(ii) Considerato il gruppo moltiplicativo $U((\mathbb{Z}/625\mathbb{Z})), \cdot) = (\mathbb{Z}/625\mathbb{Z})^*, \cdot)$ delle **unitá** od **elementi invertibili** dell'anello quoziente $((\mathbb{Z}/625\mathbb{Z}); +, \cdot)$, determinare

$$\{x \in U((\mathbb{Z}/625\mathbb{Z})) \mid x \equiv \ 1 \mod \ 25\}\,.$$