Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1
Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 8 (15 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Sia X un insieme e $\emptyset \neq Y \subset X$ un suo sottoinsieme proprio non vuoto. Sia Z un altro insieme e si consideri Z^X l'insieme di tutte le applicazioni da X in Z. Introduciamo la seguente relazione su Z^X definita da:

$$f, g \in Z^X, \ f \sim g \Leftrightarrow \ f|_Y = g|_Y, \ i.e. f(y) = g(y), \ \forall y \in Y.$$

(i) Dimostrare che $\sim$ é una relazione di equivalenza su Z^X

(ii) Determinare l'insieme quoziente $(Z^X/\sim)$ come opportuno insieme di applicazioni a valori in Z.

(iii) Considerare Z ordinato con la relazione d'ordine parziale di eguaglianza $(Z, =)$ e, per un qualsiasi $a \in Y$, considerare l'applicazione ev_a :=**valutazione in** $a \in Y$

$$Z^X \xrightarrow{ev_a} Z$$

definita da:

$$ev_a(f) := f(a), \ \forall \ f \in Z^X.$$

Stabilire se ev_a é un applicazione di insiemi che risulta compatibile con la relazione d'equivalenza $\sim$ nel suo dominio Z^X e con quella di ordine parziale $=$ nel suo codominio Z. In caso di risposta affermativa, denotata con

$$\pi_\sim : Z^X \twoheadrightarrow (Z^X/\sim)$$

la proiezione canonica al quoziente, stabilire che esiste un'unica applicazione, denotata con

$$\overline{ev}_a : (Z^X/\sim) \ \to Z,$$

che renda commutativo il diagramma di applicazioni

$$\begin{array}{ccc} Z^X & \xrightarrow{ev_a} & Z \\ \downarrow^{\pi_\sim} & \nearrow_{\overline{ev}_a} & \\ (Z^X/\sim) & & \end{array} \qquad \text{i.e. } ev_a = \overline{ev}_a \circ \pi_\sim.$$

(iv) Cosa accade dei quesiti al punto (iii) se invece $a \in X \setminus Y$?

(v) Con le notazioni precedenti, considerando $X = Z = \mathbb{R}$ e $Y = [0, 1]$ e la medesima relazione $\sim$, determinare l'insieme quoziente $\left(\mathbb{R}^\mathbb{R}/\sim\right)$ e rispondere alle domande come nel quesito (iii) per le seguenti applicazioni di valutazione:

- $ev_{-1} + ev_1$, definita come $(ev_{-1} + ev_1)(f) := f(-1) + f(1), \ \forall \ f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$;
- $ev_0 \cdot ev_1$, definita come $(ev_0 \cdot ev_1)(f) := f(0) \cdot f(1), \ \forall \ f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$;
- $(ev_{-1})^2$, definita come $ev_{-1} \cdot ev_{-1}$.

Esercizio 2. Per gli insiemi X sotto riportati e le relazioni $\sim$ sotto definite, dimostrare che definiscono sempre relazioni di equivalenza sull'insieme X, determinando esplicitamente le classi di $\sim$-equivalenza degli elementi di X e l'insieme quoziente $X/\sim$.

(i) $X = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$.

(ii) $X = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ e $x \sim y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

(iii) $X = \mathbb{Z}$ e $m \sim n \Leftrightarrow \ \exists \ k \in \mathbb{Z}$ t.c. $m = 2^k n$.

Esercizio 3. (i) Sia X un insieme e sia $(G, \circ)$ un gruppo. Si definisce **azione del gruppo** G **sull'insieme** X un'applicazione

$$\begin{array}{rccc} * : & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (g, x) & \longrightarrow & g * x \end{array}$$

per cui valgano:

$$Id_G * x = x, \ \forall x \in X, \text{ e } (g \circ h) * x = g * (h * x), \ \forall x \in X, \forall g, h \in G.$$

L'azione di G su X induce una relazione su X nel modo seguente:

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \ \exists \, g \in G \text{ t.c. } y = g * x.$$

Dimostrare che $\sim_G$ é una relazione di equivalenza su X, le cui classi di equivalenza vengono chiamate **obite dell'azione di** G **sull'insieme** X, denotate con $\mathcal{O}_G(x)$, $\forall \ x \in X$. In altri termini, per ogni $x \in X$, si ha che

$$[x]_\sim = \mathcal{O}_G(x) := \{g * x \mid g \in G\}.$$

(ii) Consideriamo $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $\sigma = (1, 3, 5)(2, 4) \in S_5$, dove S_5 é il gruppo simmetrico su 5 elementi, che ha struttura di gruppo rispetto al prodotto di composizione $\circ$ di permutazioni. Introduciamo su X la seguente relazione

$$i, j, \in X \text{ sono t.c. } i \sim j \Leftrightarrow \ \exists \, k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } j = \sigma^k(i).$$

Determinare esplicitamente un opportuno gruppo $(G, \circ)$ che sia **sottogruppo di** S_5, i.e. G un gruppo rispetto alla stessa operazione di composizione di permutazioni di S_5, di modo tale che la relazione $\sim$ sopra definita sia una relazione proveniente dall'azione di $(G, \circ)$ su X, i.e.

$$\sim = \sim_G .$$

Determinare inoltre la cardinalitá di G, descrivere le orbite degli elementi di X sotto l'azione di G e la loro cardinalitá, determinare l'insieme quoziente $(X/\sim) = (X/\sim_G)$ e la sua cardinalitá.

(iii) Sia $X = \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, e sia S_n il gruppo simmetrico su n elementi. Dati due vettori complessi $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, $\underline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, definiamo la seguente relazione

$$\underline{z} \sim \underline{w} \ \Leftrightarrow \ \exists \, \sigma \in S_n \text{ t.c. } (w_1, \ldots, w_n) = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}).$$

Riconoscere che la relazione $\sim$ é indotta da un'azione di $G = S_n$ su $X = \mathbb{C}^n$, i.e. $\sim = \sim_{S_n}$ e calcolare la cardinalitá delle orbite (o classi di equivalenza) degli elementi di X.

(iv) Sia T un'indeterminata e si consideri l'applicazione d'insiemi

$$p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}[T],$$

dove $\mathbb{C}[T]$ l'anello dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{C}$ e nell'indeterminata T, definita da

$$p(\underline{z}) = p((z_1, \ldots, z_n)) = \Pi_{i=1}^n (T - z_i) \in \mathbb{C}[T], \ z_i \in \mathbb{C}, \ \forall \, 1 \leq i \leq n.$$

Dimostrare che l'applicazione p é compatibile con la relazione di equivalenza $\sim_{S_n}$ sul dominio $\mathbb{C}^n$ e con la relazione d'ordine parziale dato dall'eguaglianza $=$ su $\mathbb{C}[T]$.

(v) Dimostrare che la relazione $\sim_p$ indotta su $\mathbb{C}^n$ dall'applicazione p sopra definita coincide con la relazione $\sim_{S_n}$ su $\mathbb{C}^n$.

(vi) Determinare $Y \subset (\mathbb{C}[T], =)$ che rappresenti l'insieme quoziente $(\mathbb{C}^n/\sim) = (\mathbb{C}^n/\sim_{S_n})$.

(vii) Dedurre da (vi) una rappresentazione di $(\mathbb{C}^n/\sim) = (\mathbb{C}^n/\sim_{S_n})$ come opportuno sottoinsieme di $\mathbb{C}^n$.