Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 7 (30 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Si consideri $V = \mathbb{R}^3$ spazio vettoriale, con coordinate (x, y, z) indotte dalla base canonica $\mathcal{E}$ su V, e sia dato l'endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ definito da

$$f(x, y, z) = (2x,\ -x - 3y - z,\ -x + 4y + z).$$

(i) Determinare lo **spettro** di f, deducendo che l'endomorfismo f ammette allora **forma canonica di Jordan** $J_f \in M(3, 3; \mathbb{R})$.

(ii) Per ogni autovalore λ nello spettro di f determinare la relativa **molteplicitá algebrica** $m_a(\lambda)$, la relativa **molteplicitá geometrica** $m_g(\lambda)$, equazioni cartesiane del relativo **autospazio** $E_\lambda(f)$ e dimensione del relativo **autospazio generalizzato** $V_\lambda(f)$, deducendo che la forma canonica J_f non é una forma diagonale.

(iii) Per ogni autovalore λ di f, trovare equazioni cartesiane dell'autospazio generalizzato $V_\lambda(f)$ e determinare l'**indice di nilpotenza** dell'endomorfismo

$$f'_\lambda := (f - \lambda \mathrm{Id}_V)|_{V_\lambda(f)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_\lambda(f))$$

indotto da f su ciascun autospazio generalizzato.

(iv) Dedurre la forma canonica di Jordan J_f di f (a meno di permutazione dell'ordine dei suoi blocchi).

(iv) Determinare una **base di Jordan** $\mathcal{J}$ per V, i.e. una base per V in cui $M_{\mathcal{J},\mathcal{J}} = J_f$, con J_f come nel punto (iii), deducendo la base $\mathcal{J}$ da opportune **basi cicliche (o di stringhe)** dei relativi endomorfismi f'_λ indotti da f su ciascun autospazio generalizzato $V_\lambda(f)$, per ogni autovalore λ di f.

(v) Detta $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ la matrice rappresentativa in base $\mathcal{E}$ di f, determinare una matrice $M \in GL(3, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM = J_f$.

Esercizio 2. Sia $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorfismo la cui matrice rappresentativa nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare lo **spettro** di $f := L_A$, deducendo che esso ammette allora **forma canonica di Jordan** $J_f \in M(4, 4; \mathbb{R})$.

(ii) Per ogni autovalore λ nello spettro di $f = L_A$ determinare la relativa **molteplicitá algebrica** $m_a(\lambda)$, la relativa **molteplicitá geometrica** $m_g(\lambda)$, equazioni cartesiane del relativo **autospazio** $E_\lambda(f)$ e dimensione del relativo **autospazio generalizzato** $V_\lambda(f)$, deducendo che la forma canonica J_f non é una forma diagonale.

(iii) Per ogni autovalore λ di $f = L_A$, trovare equazioni cartesiane dell'autospazio generalizzato $V_\lambda(f)$ e determinare l'**indice di nilpotenza** dell'endomorfismo

$$f'_\lambda := (A - \lambda\, \mathrm{I}_4)|_{V_\lambda(f)} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V_\lambda(f))$$

indotto da $f = L_A$ su ciascun autospazio generalizzato.

(iv) Dedurre la forma canonica di Jordan J_f di $f = L_A$ (a meno di permutazione dell'ordine dei suoi blocchi).

(iv) Determinare una **base di Jordan** $\mathcal{J}$ per V, i.e. una base per V in cui $M_{\mathcal{J},\mathcal{J}} = J_f$, con J_f come nel punto (iii), deducendo la base $\mathcal{J}$ da opportune **basi cicliche (o di stringhe)** dei relativi endomorfismi f'_λ indotti da $f = L_A$ su ciascun autospazio generalizzato $V_\lambda(f)$, per ogni autovalore λ di $f = L_A$.

(v) Determinare una matrice $M \in GL(4, \mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM = J_f$.