Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1
Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 7 (8 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. (i) Sia $(\mathbb{N}, \leq)$ con ordinamento naturale e siano $X := \{0,1\}$ e $Y := \{0,1,2\}$ sottoinsiemi ordinati di $(\mathbb{N}, \leq)$ con rispettivi ordinamenti $\leq_X$ e $\leq_Y$ indotti dall'ordinamento naturale dato $\leq$ di $\mathbb{N}$. Consideriamo ora

$$(X \times Y, \quad \leq_P := \leq_X \times \leq_Y)$$

i.e. il prodotto cartesiano ordinato con l'**ordinamento prodotto**.

(a) Stabilire se $(X \times Y, \quad \leq_P)$ é un insieme **totalmente ordinato** oppure, in caso di risposta negativa, determinare un **raffinamento** $\widetilde{\leq_P}$ di $\leq_P$ di modo che induca un **ordinamento totale** su $X \times Y$ compatibile con l'ordinamento parziale $\leq_P$.

(b) Dimostrare che le rispettive proiezioni

$$p_X : (X \times Y, \leq_P) \to (X, \leq_X) \ \text{ e } \ p_Y : (X \times Y, \leq_P) \to (Y, \leq_Y)$$

sono **morfismi suriettivi di insiemi ordinati**.

(ii) Consideriamo invece $(X \times Y, \leq_L)$, i.e. l'insieme prodotto cartesiano ordinato con **ordinamento lessicografico** come definito a lezione.

(a) Dimostrare che poiché $\leq_X$ e $\leq_Y$ sono entrambi ordini totali allora anche $\leq_L$ é ordine totale su $X \times Y$.

(b) Stabilire se le proiezioni

$$p_X : (X \times Y, \leq_L) \to (X, \leq_X) \text{ e } p_Y : (X \times Y, \leq_L) \to (Y, \leq_Y)$$

sono morfismi suriettivi di insiemi ordinati.

(iii) Siano $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ e $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ con i loro ordinamenti naturali. Si consideri l'insieme

$$\mathcal{L} := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists \lim_{n \to \infty} f(n) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si introduca su $\mathcal{L}$ la seguente relazione

$$f \leq_{\mathcal{L}} g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(m) \leq_{\mathbb{R}} g(m), \ \forall m \geq_{\mathbb{N}} n_0.$$

(a) Stabilire se $\leq_{\mathcal{L}}$ é una relazione d'ordine su $\mathcal{L}$.

(b) Stabilire se l'applicazione cosí definita:

$$\phi : (\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}}) \to (\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}), \quad f \xrightarrow{\phi} \phi(f) := \lim_{n \to \infty} f(n)$$

conserva le relazioni, i.e. $f \leq_{\mathcal{L}} g \ \Rightarrow \ \phi(f) \leq_{\mathbb{R}} \phi(g)$.

Esercizio 2. (i) Sia $(Y := \{1,2\}, \leq_Y) \subset (\mathbb{N}, \leq)$, i.e. Y sottoinsieme ordinato mediante l'ordinamento indotto da quello naturale su $\mathbb{N}$ e sia invece $(X := \{x_1, x_2\}, =)$ con ordinamento dato dall'eguaglianza. Si consideri l'applicazione $\varphi : X \to Y$ definita come

$$\varphi(x_1) = 1, \ \varphi(x_2) = 2.$$

Dimostrare che φ é una **biiezione di insiemi ordinati**, i.e. φ é biunivoca e φ é compatibile cn ordinamenti in dominio e codominio, che peró **non é un isomorfismo di insiemi ordinati**.

(ii) Se invece $(X := \{x_1, x_2\}, \leq_X)$ é **totalmente ordinato** dimostrare che ogni biiezione ordinata $\varphi : X \to Y$ é necessariamente un isomorfismo di insiemi ordinati.

(iii) Dimostrare che $(X \times Y, \leq_L)$ e $(Y \times X, \leq_L)$ non sono isomorfi come insiemi ordinati e descrivere esplicitamente i due rispettivi **diagrammi di Hasse**.

(iv) Dimostrare che l'applicazione

$$Id_{Y\times Y} : (Y \times Y,\ \times_P := \leq_Y \times \leq_Y) \to (Y \times Y,\ \leq_L),$$

dove come sopra $\leq_P$ denota l'ordinamento prodotto mentre $\leq_L$ denota l' ordinamento lessicografico sul prodotto, é una biiezione di insiemi ordinati ma non é un isomorfismo di insiemi ordinati.

(v) Sia ora $(Y, \leq_Y) = (\mathbb{R}, \leq)$ con ordinamento naturale che risulta compatibile con le operazioni di **anello commutativo unitario** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Insiemisticamente, possiamo identificare $\mathbb{C}$ con il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (**piano di Argand-Gauss**):

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \ (a, b) \to a + ib,\ \text{con}\ \ i^2 = -1,$$

e sappiamo che ci sono vari modi per introdurre relazioni d'ordine su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dimostrare che peró **non esiste** alcun ordinamento $\leq_\rho$ su $\mathbb{C}$ che possa essere compatibile con le operazioni di anello commutativo unitario $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(vi) Sia $(Y, \leq_Y)$ un insieme totalmente ordinato e sia $n \geq 1$ un qualsiasi intero. Determinare, per ogni $n \neq 1$, l'**ordinamento lessicografico** sull'insieme

$$Y^n := Y \times Y \times \cdots \times Y,\ \ n - \text{esimo prodotto cartesiano}$$

e sull'insieme

$$Z := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} Y^n.$$

Esercizio 3. (i) Siano $(\mathbb{Z}, \leq_\mathbb{Z})$ e $(\mathbb{Q}, \leq_\mathbb{Q})$ insiemi ordinati con il loro ordinamento naturale. Dimostrare che $(\mathbb{Z}, \leq_\mathbb{Z})$ non é isomorfo come insieme ordinato a $(\mathbb{Q}, \leq_\mathbb{Q})$.

(ii) Dimostrare che esistono morfismi suriettivi di insiemi ordinati

$$(\mathbb{Q}, \leq_\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}, \leq_\mathbb{Z})\ \text{ e }\ (\mathbb{R}, \leq_\mathbb{R}) \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}, \leq_\mathbb{Z})$$

(iii) Dimostrare invece che non esiste alcun morfismo suriettivo di insiemi ordinati

$$(\mathbb{R}, \leq_\mathbb{R}) \xrightarrow{f} (\mathbb{Q}, \leq_\mathbb{Q})$$

tale che $f|_\mathbb{Q} = Id_\mathbb{Q}$.

(iv) Si consideri $\mathbb{N}$ ordinato con la relazione $\rho = |$ di **divisibilitá**, i.e.

$$a, b \in \mathbb{N}\ t.c.\ a\ \rho\ b\ \Leftrightarrow\ a|b.$$

Consideriamo

$$D_{36} := \{d \in \mathbb{N}\ t.c.\ d|36\}\ \text{ e }\ B_{36} := \{d \in D_{36}\ t.c.\ d < 36\}.$$

Descrivere i diagrammi di Hasse di $(D_{36}, \rho = |)$ e di $(B_{36}, \rho = |)$ deducendo se l'ordinamento indotto su questi sottoinsiemi é un ordinamento totale o meno, determinando eventuali elementi **minimali** e **massimali** di D_{36} (risp. B_{36}) rispetto alla relazione data $\rho = |$, stabilendone la loro eventuale unicitá o meno, deducendo infine se sono elementi **minimi** e **massimi** di D_{36} (risp. B_{36}) rispetto alla relazione data $\rho = |$.