Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 6 (23 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V := \mathbb{R}^3$ munito di prodotto scalare standard $\langle\ ,\ \rangle_{st}$ e di base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_2}\}$ che é base $\langle\ ,\ \rangle_{st}$-ortonormale. Sia $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*,\ \mathbf{e}_2^*,\ \mathbf{e}_3^*\}$ la **base duale** della base $\mathcal{E}$ nello **spazio vettoriale duale** $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Si considerino i seguenti vettori di V:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2.$$

(i) Stabilire se il sistema di vettori $\mathcal{V} := \{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ costituisce una base per V ed, in caso di risposta affermativa, determinare la base duale $\mathcal{V}^* = \{\mathbf{v}_1^*,\ \mathbf{v}_2^*,\ \mathbf{v}_3^*\}$ di $\mathcal{V}$ esprimendo ciascun funzionale lineare $\mathbf{v}_i^*$ come combinazione lineare dei funzionali in $\mathcal{E}^*$, $1 \leq i \leq 3$.

(ii) Rappresentare ciascun funzionale $\mathbf{v}_i^*$, $1 \leq i \leq 3$, per mezzo del prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle_{st}$, i.e. per ogni $\mathbf{v}_i^*$ determinare l'unico vettore $\mathbf{w}_i \in V$, espresso in coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$, per cui si abbia $\mathbf{v}_i^* = \langle\ \mathbf{w}_i,\ --\rangle_{st}$, per $1 \leq i \leq 3$.

(iii) Denotate con (x, y, z) le coordinate indotte su V dalla base $\mathcal{E}$, determinare equazioni cartesiane del **sottospazio annullatore**

$$\mathrm{Ann}_V(\mathbf{v}_1^*) := \{\mathbf{u} \in V \mid \mathbf{v}_1^*(\mathbf{u}) = 0\} = \mathrm{Ker}(\mathbf{v}_1^*) \subset V.$$

Descrivere $\mathrm{Ann}_V(\mathbf{v}_1^*)$ utilizzando il concetto di ortogonalitá indotto su V da $\langle\ ,\ \rangle_{st}$.

(iv) Dato $W := \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ sottospazio di V, determinare la dimensione del **sottospazio annullatore**

$$Ann_{V^*}(W) := \{f \in V^* \mid f(\mathbf{w}) = 0,\ \ \forall\, \mathbf{w} \in W\} \subset V^*.$$

Determinare inoltre una base di $Ann_{V^*}(W)$, i cui elementi siano espressi come combinazioni lineari degli elementi di $\mathcal{E}^*$. Che relazione c'é con l'equazione cartesiana nelle coordinate (x, y, z) che definisce W in V?

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al piú 4. Consideriamo il sottoinsieme

$$U := \{p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0\} \subset V.$$

(i) Stabilire se U é un sottospazio di V ed, in caso di risposta affermativa, determinare $\dim_{\mathbb{R}}(U)$.

(ii) Determinare dimensione ed una base dello **spazio vettoriale quoziente** V/U.

(iii) Determinare $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ per cui si abbia $\mathbb{R}^k \simeq (V/U)$ determinando un esplicito isomorfismo $\varphi \in \mathrm{Isom}\left(V/U\ ,\ \mathbb{R}^k\right)$.

(iv) Sia $\pi_U : V \twoheadrightarrow V/U$ l'**epimorfismo** (i.e. morfismo suriettivo) di spazi vettoriali dato dalla **proiezione canonica sul quoziente**. Stabilire se in V/U si ha:

$$[x] = \pi_U(x) = \pi_U(x^3) = [x^3].$$

In caso di risposta negativa, stabilire se il sistema di vettori (classi) $\{[x],\ [x^3]\}$ puó costituire una base di V/U.

(v) Stabilire se invece il sistema di vettori (classi) $\{[x],\ [x^2+2]\}$ puó costituire una base di V/U.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ **spazio vettoriale euclideo**, con prodotto scalare standard $\langle , \rangle_{st}$ e base canonica $\mathcal{E}$, che fornisce coordinate (x, y, z) su X. Consideriamo il sottospazio vettoriale

$$U:\ x - 2y + z = 0.$$

(a) Interpretare le classi di equivalenza nello **spazio vettoriale quoziente** $\mathbb{R}^3/U$ come **sottospazi affini** nello spazio $X = \mathbb{R}^3$ (che é spazio affine su se stesso), descrivendo le operazioni di spazio vettoriale in $\mathbb{R}^3/U$ con l'interpretazione delle classi come sottospazi affini di $\mathbb{R}^3$.

(b) Dato $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$, definito da $\varphi := \Pi_{\mathbf{n}} \circ \psi$ dove:

• $\Pi_{\mathbf{n}}$ denota l'endomorfismo **proiettore ortogonale** sul sottospazio vettoriale $U^{\perp} := \mathrm{Span}(\mathbf{n}) \subset X = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ un vettore normale al piano vettoriale U, mentre

• $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ é tale che $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\psi) = A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

• denotata con $\pi_U : \mathbb{R}^3 \twoheadrightarrow (\mathbb{R}^3/U)$ la naturale **proiezione canonica** al quoziente,

determinare l'unica applicazione lineare, denotata con

$$\overline{\varphi} : (\mathbb{R}^3/U) \ \to \mathbb{R}^3,$$

che renda commutativo il diagramma di applicazioni lineari

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ \downarrow^{\pi_U} & \nearrow_{\overline{\varphi}} & \\ (\mathbb{R}^3/U) & & \end{array} \qquad \text{i.e. } \varphi = \overline{\varphi} \circ \pi_U.$$

Esercizio 4. Sia $n \geq 1$ un intero.

(i) Sullo spazio vettoriale hermitiano $\mathbb{C}^n$ dotato del **prodotto hermitiano standard**

$$\langle \mathbf{x} \ , \ \mathbf{y} \rangle_{h,st} := \mathbf{x}^t \circ \overline{\mathbf{y}}$$

sia data $Z \in M(n,n;\mathbb{C})$ una **matrice hermitiana**, i.e. $Z^t = \overline{Z}$, ed $A \in M(n,n;\mathbb{C})$ una qualsiasi matrice. Consideriamo la matrice

$$B := Z - A \circ Z \in M(n,n;\mathbb{C}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n).$$

Dimostrare che la **matrice (od endomorfismo) aggiunto** B^* di B é tale che

$$B^* = Z - \overline{A}^t \circ Z.$$

(ii) Sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ dotato di **prodotto scalare standard**

$$\langle \mathbf{x} \ , \ \mathbf{y} \rangle_{st} := \mathbf{x}^t \circ \mathbf{y}$$

sia data $X \in M(n,n;\mathbb{R})$ una **matrice simmetrica**, i.e. $X^t = X$, ed $A \in M(n,n;\mathbb{R})$ una qualsiasi matrice. Consideriamo la matrice

$$B := X - A \circ X \in M(n,n;\mathbb{R}) \simeq \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrare che la **matrice (od endomorfismo) aggiunto** C^* di C é tale che

$$C^* = X - A^t \circ X.$$