Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1
Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 6 (1 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. (i) Calcolare la cardinalitá dell'insieme

$$X := \{d \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d \mid 144000 \text{ e}\, d\, \text{ha un numero pari di divisori}\}.$$

(ii) Calcolare la cardinalitá dell'insieme

$$Y := \{d \in \mathbb{N} \text{ t.c. } d \mid 144000 \text{ e } d \text{ é un quadrato ma non é un cubo}\}.$$

(iii) Si consideri la successione di numeri interi $\{F_n\}_{n\geq 0}$ definiti per ricorrenza nel seguente modo:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n := F_{n-1} + F_{n-2}\ \forall\, n \geq 2.$$

La successione $\{F_n\}_{n\geq 0}$ cosí determinata viene chiamata la **successione di Fibonacci**. Determinare una **soluzione dell'equazione ricorsiva**

$$F_n := F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall\, n \geq 2,$$

i.e. scrivere una formula chiusa che permetta di determinare, per ogni indice $n \geq 2$, l'intero di Fibonacci F_n come funzione dell'indice n e non dei suoi termini precedenti.

(iv) Per ogni $n \geq 1$, si consideri $\mathcal{S}_n$ il gruppo simmetrico sull'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dimostrare che la cardinalitá del sottoinsieme di $\mathcal{S}_n$, definito come:

$$Y_n := \{f \in \mathcal{S}_n \mid i - 1 \leq f(i) \leq i + 1,\ \forall\, 1 \leq i \leq n\}$$

é uguale all'$(n + 1)$-numero di Fibonacci, i.e. $|Y_n| = F_{n+1}$, per ogni $n \geq 1$

Esercizio 2. Sia $n \geq 1$ un qualsiasi intero.

(i) Date $4n$ persone, in quanti modi possibili si possono formare n squadre di poker, ciascuna formata da 4 persone?

(ii) Date $4n$ persone, di cui $2n$ uomini e $2n$ donne, in quanti modi possibili si possono formare n squadre di poker ciascuna composta da 2 uomini e 2 donne?

(iii) Consideriamo una scacchiera $\Sigma_{n,n}$ con $n \times n$ caselle, in cui ogni casella ha colore o bianco o nero.

- (a) Quante sono le possibili colorazione di $\Sigma_{n,n}$ di modo che nessuna riga di $\Sigma_{n,n}$ sia interamente bianca od interamente nera?
- (b) Quante sono le possibili colorazione di $\Sigma_{n,n}$ di modo che ciascuna riga e ciascuna colonna di $\Sigma_{n,n}$ contenga una ed una sola casella nera?
- (c) Supponendo che n sia pari, quante sono le possibili colorazione di $\Sigma_{n,n}$ di modo che ogni riga contenga lo stesso numero di caselle bianche e nere?

(iv) Utilizzando quattro differenti strategie, dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ vale la seguente la eguaglianza:

$$\Sigma_{k=0}^{n}\, k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$