Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 5 (16 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ tale che $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ finita.

(i) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e V sia dotato di una **forma hermitiana definita positiva** $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$. Ricordiamo che $F \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ si dice **operatore hermitiano** se, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vale

$$(*) \quad \langle F(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle_h = \langle \mathbf{v}, F(\mathbf{w}) \rangle_h.$$

Mostrare che $F \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ é hermitiano se e solo se, per ogni base $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ -**ortonormale** $\mathcal{E}$ di V la matrice rappresentativa $A := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(F) \in M(n, n; \mathbb{C})$ di F in tale base é una **matrice hermitiana**, i.e. $A^t = \overline{A}$.

(ii) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ricordiamo che $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ si dice **operatore autoaggiunto** (o **simmetrico**) se, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vale

$$(**) \quad \langle F(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, F(\mathbf{w}) \rangle.$$

Mostrare che $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ é autoaggiunto (o simmetrico) se e solo se, per ogni base $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -**ortonormale** $\mathcal{E}$ di V la matrice rappresentativa $A := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(F) \in M(n, n; \mathbb{R})$ di F in tale base é una **matrice simmetrica**, i.e. $A^t = A$.

(iii) Considerare i seguenti quesiti che mostrano come nei precedenti punti la richiesta sulla base $\mathcal{E}$ é importante. Infatti, consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $V := \mathbb{R}^2$ munito di prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_{st}$ e di base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ che é $\langle \cdot, \cdot \rangle_{st}$ -ortonormale. Considerare in seguito la base $\mathcal{G} := \{\mathbf{g}_1 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{g}_2 := 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$.

(a) Considerato $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ definito da

$$F(\mathbf{g}_1) = 3\mathbf{g}_1 \quad F(\mathbf{g}_2) = 6\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2,$$

verificare che F é un operatore autoaggiunto ma che la matrice $M_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}(F)$ non é una matrice simmetrica.

(b) Considerato $S \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ tale che

$$M_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}(S) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

verificare che S non definisce un operatore autoaggiunto su $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$

(iv) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e V sia dotato di una **forma hermitiana definita positiva** $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$. Ricordiamo che $F \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ si dice **operatore unitario** se, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vale

$$(***) \quad \langle F(\mathbf{v}), F(\mathbf{w}) \rangle_h = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_h.$$

Mostrare che $F \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ é unitario se e solo se, per ogni base $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ -**ortonormale** $\mathcal{E}$ di V la matrice rappresentativa $U := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(F) \in M(n, n; \mathbb{C})$ di F in tale base é una **matrice unitaria**, i.e. $U^t \circ \overline{U} = I_n$.

(v) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ricordiamo che $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ si dice **operatore ortogonale** se, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vale

$$(***) \quad \langle F(\mathbf{v}), F(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Mostrare che $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ é ortogonale se e solo se, per ogni base $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -**ortonormale** $\mathcal{E}$ di V la matrice rappresentativa $M := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(F) \in M(n, n; \mathbb{R})$ di F in tale base é una **matrice ortogonale**, i.e. $M^t \circ M = I_n$.

Esercizio 2. (i) Consideriamo lo spazio vettoriale euclideo $V := \mathbb{R}^4$ munito di prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle_{st}$ e di base canonica $\mathcal{E}$ che é base $\langle \cdot, \cdot \rangle_{st}$ -ortonormale. Sia $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ tale che

$$A := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Riconoscere che F é un operatore autoaggiunto.
 - (b) Senza calcoli dedurre il **polinomio caratteristico** $P_F(x)$, lo **spettro** di F e la **forma diagonale** D di F .
 - (c) Utilizzando il **Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti** determinare una matrice M **ortogonale** per cui $M^t \circ A \circ M = D$.
- (ii) Consideriamo lo spazio vettoriale $V := \mathbb{C}^3$ munito di prodotto hermitiano standard $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{h, st} := \mathbf{x}^t \circ \overline{\mathbf{y}}$ e di base canonica $\mathcal{E}$ che é base reale $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h, st}$ -ortonormale. Sia $T \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ tale che

$$B := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{i}{4} & \frac{-1+i}{4} \\ -\frac{i}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-(1+i)}{4} \\ \frac{-(1+i)}{4} & \frac{-1+i}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Riconoscere che F é un operatore hermitiano.
- (b) Determinare il **polinomio caratteristico** $P_T(x)$, lo **spettro** di T e la **forma diagonale** D di T .
- (c) Determinare una base $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h, st}$ -ortogonale di autovettori $\mathcal{V}$ di T e calcolare la matrice di $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h, st}$ in tale base, i.e. calcolare $M_{\mathcal{V}}(\langle \cdot, \cdot \rangle_{h, st})$.
- (d) Utilizzando il **Teorema spettrale degli operatori hermitiani**, determinare una matrice U **unitaria** per cui $\overline{U}^t \circ B \circ U = D$.