**Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"**
**Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025**
**Corso: Algebra 1**
**Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini**

**Esercitazione/Tutorato 5 (25 Marzo 2025) - Prof. F. Flamini**

**Esercizio 1.** Sia $n \geq 3$ un intero e sia $X_n := \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}$.

(i) Contare il numero di terne ordinate $(A, B, C)$ costituite da sottoinsiemi di $X_n$ che formino una **partizione** di $X_n$, i.e. $X_n = A \cup B \cup C$ dove $A, B, C \subseteq X_n$ a due a due disgiunti.

(ii) Contare il numero di terne ordinate $(A, B, C)$ costituite da sottoinsiemi di $X_n$ che costituiscano un **ricoprimento** di $X_n$, i.e. $X_n = A \cup B \cup C$ con $A, B, C$ sottoinsiemi di $X_n$.

(iii) Contare il numero di sottoinsiemi di $X_n$ che contengano almeno 3 interi di **stessa paritá**, i.e. almeno 3 interi (compresi tra 1 e $n$) o tutti pari oppure tutti dispari.

(iv) Se $n = 10000$, determinare la cardinalitá del sottoinsieme di $X_{10000}$ definito come:

$$Y := \{x \in X_{10000} \mid MCD(x, 18) = 6 \text{ e contemporaneamente } 7|(x-2)\}.$$

(v) Se $n = 100$, determinare la cardinalitá del sottoinsieme del prodotto cartesiano $X_{100}^2 := X_{100} \times X_{100}$ dato da:

$$Z := \left\{(x, y) \in X_{100}^2 \mid x < y + 6\right\}.$$

(vi) Se $n = 20$, contare il numero di coppie ordinate $(A, B)$ costituite da sottoinsiemi di $X_{20}$ tali che $|A| = 5$ e $|A \cup B| = 12$.

(vii) Se $n = 20$, contare il numero di terne ordinate $(A, B, C)$ costituite da sottoinsiemi di $X_{20}$ tali che $|(A \cup B) \cap C| = 8$.

**Esercizio 2.** Sia $n \geq 2$ un intero e sia $X_n := \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{Z}$.

(i) Sia $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(X_n)$ il gruppo delle **permutazioni** dell'insieme $X_n$. Determinare la cardinalitá del sottoinsieme di $S_n$ cosí definito

$$\{f \in S_n \mid f(i) \leq i + 1, \ \forall\, 1 \leq i \leq n\}.$$

(ii) Se $n = 100$, determinare la cardinalitá del sottoinsieme di $(X_{100})^{X_{100}}$ cosí definito:

$$A := \left\{f \in (X_{100})^{X_{100}} \mid |Fix(f)| = 10\right\},$$

dove, per ogni $f \in (X_{100})^{X_{100}}$, si denota con $Fix(f) := \{x \in X_{100} \mid f(x) = x\}$ il sottoinsieme di $X_{100}$ formato dai **punti fissi della funzione** $f$.

(iii) Se $n = 100$, determinare la cardinalitá del sottoinsieme di $(X_{100})^{X_{100}}$ cosí definito:

$$A := \left\{f \in (X_{100})^{X_{100}} \mid \Sigma_{x \in X_{100}} |f(x) - x| = 2\right\}.$$

(iv) Se $n = 100$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ un qualsiasi insieme di cardinalitá 4, si consideri il sottoinsieme $S(X_100, Y) \subset Y^{X_100}$ definito da

$$S(X_{100}, Y) := \left\{f \in Y^{X_{100}} \mid f \text{ suriettiva}\right\}.$$

Presi interi positivi $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}^+$ si consideri il sottoinsieme di $S(X_{100}, Y)$ cosí definito:

$$S(X_{100}, Y; (k_1, k_2, k_3, k_4)) := \left\{f \in S(X_{100}, Y) \ t.c. \ |f^{-1}(\{y_i\})| = k_i, \ 1 \leq i \leq 4\right\},$$

dove $f^{-1}(\{y_i\})$ é il **sottoinsieme delle controimmagini di** $y_i$ **in** $X_{100}$, $1 \leq i \leq 4$. Calcolare le cardinalitá dei seguenti sottoinsiemi

$$|S(X_{100}, Y; (10, 20, 30, 35))| \ \text{ e } \ |S(X_{100}, Y; (10, 20, 30, 40))|.$$

(iv) Se $n = 10$, per ogni $f \in \mathcal{S}_{10} = \mathcal{S}(X_{10})$ definiamo

$$\Sigma(f) := \sum_{i=1}^{10} |f(i) - i|.$$

Per ogni intero positivo $t \in \mathbb{Z}^+$ definiamo

$$\mathcal{S}_{10}(t) := \{f \in \mathcal{S}_{10} \mid \Sigma(f) = t\}.$$

calcolare la cardinalitá di $\mathcal{S}_{10}(t)$ per $t = 2, 3, 4$.