Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 4 (9 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ uno spazio euclideo di dimensione 3, con riferimento cartesiano $RC(O, \mathcal{E})$, rispetto a cui si hanno coordinate di punto (x, y, z). Siano dati il piano affine π di equazione cartesiana

$$\pi : \ 2x - y = 0$$

e le rette affini di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x - 2y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x & = & 0 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

(i) Stabilire se le rette r e s sono sghembe in $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ ed, in caso di risposta affermativa, calcolare la distanza $d(r, s)$ fra le due rette sghembe.

(ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta ℓ incidente la retta r, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta s.

(iii) Determinare equazioni cartesiane di tutte le circonferenze $\mathfrak{C}$ che sono tangenti alla retta r nel punto origine O, aventi centro C sul piano π e raggio $R = 2$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ uno spazio euclideo di dimensione 3, con riferimento cartesiano $RC(O, \mathcal{E})$, rispetto a cui si hanno coordinate di punto (x, y, z). Siano dati il piano affine α di equazione cartesiana

$$\alpha : \ 2x - y + z = 4$$

e la retta affine di equazione parametrica

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \ \text{parametro.}$$

(i) Trovare equazioni cartesiane del sottospazio affine determinato dalla proiezione ortogonale della retta r sul piano α.

(ii) Determinare le formule di riflessione $R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ rispetto al piano α e determinare equazioni cartesiane del luogo di **punti fissi** di R_α.

(iii) Denotata con $\Sigma \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la **sfera** di centro l'origine O e raggio $R = 2$, determinare le equazioni cartesiane del luogo geometrico $R_\alpha(\Sigma)$.

(iv) Dati i punti

$$P_1 := (0, 1, 0), \ P_2 := (1, 1, 1), \ P_3 := (2, 0, 1),$$

espressi in coordinate rispetto al riferimento $RC(O, \mathcal{E})$. Dopo aver verificato che i tre punti dati non sono allineati, determinare l'equazione cartesiana dell'unico piano β contenenete i 3 punti e stabilire se la circonferenza $\mathfrak{C}$ sul piano β, passante per i tre punti P_1, P_2, P_3, puó intersecare il luogo geometrico $R_\alpha(\Sigma)$.