Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1
Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 4 (18 Marzo 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Dati in $\mathbb{Q}[x]$ i seguenti polinomi

$$p(x) = x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 4x + 4,\ f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x],$$

utilizzando la divisione Euclidea con resto in $\mathbb{Q}[x]$, calcolare il massimo comun divisore $MCD(p(x),\ f(x)) \in \mathbb{Q}[x]$ dei due polinomi dati ed un'identitá di Bezout per esso.

Esercizio 2. Risolvere i seguenti quesiti su polinomi in un'indeterminata x a coefficienti in un campo:
(i) Dato $\mathbb{K}$ un campo e x un'indeterminata su $\mathbb{K}$, dimostrare che nell'anello $\mathbb{K}[x]$ i binomi $(x - \alpha) \in \mathbb{K}[x]$, per un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{K}$, sono polinomi irriducibili.

(ii) Dimostrare che il polinomio $p(x) = x^2 - 2$ é irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ ma non lo é in $\mathbb{R}[x]$.

(iii) Dimostrare che nell'anello $\mathbb{C}[x]$ gli unici polinomi irriducibili sono (a meno di invertibili) i polinomi della forma $x - \alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{C}$ un qualsiasi numero complesso.

(iv) Dimostrare che invece nell'anello $\mathbb{R}[x]$ gli unici polinomi irriducibili sono (a meno di invertibili) o i polinomi della forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ un qualsiasi numero reale, oppure i polinomi della forma $x^2 + ax + b$ con **discriminante** $\Delta := a^2 - 4b < 0$.

(v) Utilizzando i punti (iii) e (iv), dedurre che:

- (v-a) il polinomio $x^2 + 1$ é irriducibile in $\mathbb{R}[x]$ ma non lo é in $\mathbb{C}[x]$;
- (v-b) un qualsiasi polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado $\deg(p(x)) \geq 3$ é necessariamente riducibile in $\mathbb{R}[x]$;
- (v-c) se $\deg(p(x)) > 3$ in generaleció non implica necessariamente che $p(x)$ abbia una radice nel campo anche se riducibile; determinare una fattorizzazione esplicita in $\mathbb{R}[x]$ del polinomio $p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ in $\mathbb{R}[x]$ osservando che $p(x)$ é privo di radici reali anche se riducibile su $\mathbb{R}$.