

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025

Corso: Geometria 2

Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 3 (2 Aprile 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $V = \mathbb{R}^3$ munito di prodotto scalare standard $\cdot$ e di base canonica $\mathcal{E}$, che risulta ortonormale rispetto a $\cdot$. Si consideri $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ il vettore colonna delle coordinate indotte sullo spazio $\mathbb{R}^3$ dalla base $\mathcal{E}$ e siano U e W i sottospazi vettoriali definiti, rispettivamente, dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$U : x_1 - x_3 = 0 \quad \text{e} \quad W : x_1 + x_3 = 0.$$

(i) Considerato l'endomorfismo $\Pi_U \in \text{End}(V)$ definito da $\Pi_U :=$ **proiezione ortogonale sul sottospazio vettoriale** U , determinare $\text{rg}(\Pi_U)$, $\text{Ker}(\Pi_U)$ e determinare in due modi differenti la matrice $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Pi_U)$ rappresentativa dell'endomorfismo nella base $\mathcal{E}$ sia in dominio che in codominio dell'endomorfismo.

(ii) Consideriamo l'endomorfismo $R_W \in \text{End}(V)$ cosí definito:
utilizzando la decomposizione ortogonale $V = W \oplus W^\perp$, $\forall \mathbf{v} \in V$ esistono e sono univocamente determinati $\mathbf{w} \in W$ e $\mathbf{w}' \in W^\perp$ tali che

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}';$$

in tale assetto, definiamo

$$R_W(\mathbf{v}) := \mathbf{w} - \mathbf{w}'.$$

L'endomorfismo R_W viene denominato **riflessione ortogonale rispetto al sottospazio** W .
Determinare $\text{rg}(R_W)$ e $\text{Ker}(R_W)$.

(iii) Si consideri infine l'endomorfismo composto

$$\varphi := R_W \circ \Pi_U \in \text{End}(V).$$

Determinare $\text{rg}(\varphi)$, la matrice $A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi)$ rappresentativa dell'endomorfismo φ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ sia in dominio che in codominio dell'endomorfismo e verificare che φ definisce una forma bilineare simmetrica $b_\varphi \in \text{Sym}(V)$ di cui se ne calcoli la dimensione del radicale di b_φ (i.e. $\dim(V)^{\perp_{b_\varphi}}$), la segnatura di b_φ , scrivendo in opportune coordinate (z_1, z_2, z_3) la forma canonica di Sylvester di b_φ .

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ un piano euclideo con riferimento cartesiano $RC(O, \mathcal{E})$ rispetto a cui si hanno coordinate (x, y) . Siano dati i punti $A, B \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ che, rispetto a tale riferimento, hanno coordinate $A = (1, 1)$ e $B = (2, -1)$.

(i) Trovare l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche della circonferenza $\mathfrak{C}$ passante per A e tangente nel punto B alla retta r di vettore direttore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

(ii) Verificare che la circonferenza $\mathfrak{C}$ trovata in (i) ha la retta $\ell : x + 2y - 9 = 0$ come **retta esterna** a $\mathfrak{C}$, i.e. la retta ℓ non é né secante né tangente $\mathfrak{C}$.

(iii) Dopo aver verificato che il punto $P = (2, 2) \in \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ é un **punto esterno** a $\mathfrak{C}$, i.e. non appartiene a $\mathfrak{C}$ né al cerchio determinato da $\mathfrak{C}$, determinare le equazioni cartesiane delle due rette tangenti a $\mathfrak{C}$ uscenti dal punto P .