

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"  
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025

Corso: Geometria 2

Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 2 (19 Marzo 2025) - Prof. F. Flamini

**Esercizio 1.** Si consideri lo spazio vettoriale  $V := \mathbb{R}^3$ , munito di base canonica  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , rispetto a cui si hanno coordinate  $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  e  $\underline{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ .

Si consideri la forma bilineare simmetrica che, rispetto a tale coordinate, si esprime nel modo seguente:

$$b(\underline{x}, \underline{y}) := x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_1 + 2x_2 y_3 - x_3 y_1 + 2x_3 y_2.$$

(i) Determinare la matrice  $A$ , rappresentativa della forma  $b$  in base  $\mathcal{E}$ , e l'espressione (come polinomio omogeneo di secondo grado nelle indeterminate date da  $\underline{x}$ ) della forma quadratica  $\mathcal{Q}_b(\underline{x})$  associata a  $b$ .

(ii) Utilizzando l'**algoritmo di Lagrange**, determinare una base per lo spazio vettoriale  $V$  che sia  $b$ -diagonalizzante (equivalentemente  $b$ -ortogonale). Dedurre la **segnatura** e la **forma canonica di Sylvester** della forma quadratica  $\mathcal{Q}_b(\underline{x})$  associata a  $b$ .

(iii) Determinare esplicitamente una **base di Sylvester**, i.e. una base per  $V$  dove  $\mathcal{Q}_b(\underline{x})$  assume la sua forma canonica di Sylvester. Denotata con  $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$  questa

base di Sylvester e con  $\underline{s} := \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$  le coordinate in tale base, determinare l'equazione cartesiana in tali coordinate del luogo dei vettori  $b$ -isotropi in  $V$ , i.e. del **cono  $b$ -isotropo**.

**Esercizio 2.** Si consideri lo spazio vettoriale  $V := \mathbb{R}^3$ , munito di base canonica  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , e si consideri la forma bilineare simmetrica  $b := b_A$  su  $V$  la cui matrice simmetrica rappresentativa in base  $\mathcal{E}$  è:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Senza l'utilizzo di procedimenti di diagonalizzazioni, dedurre che  $b_A$  definisce un **prodotto scalare**  $\langle, \rangle_A$  sullo spazio vettoriale  $V$ .

(ii) Considerato il sottospazio  $W = \text{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \subset V$ , utilizzare il **procedimento di  $\langle, \rangle_A$ -ortonormalizzazione di Gram-Schmidt** per dedurre dalla base  $\mathcal{E}' := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  di  $W$  una base  $\langle, \rangle_A$ -ortonormale  $\mathcal{F}' := \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  per  $W$ . Determinare inoltre la dimensione del **complemento  $\langle, \rangle_A$ -ortogonale**  $W^\perp$  al sottospazio  $W$  ed estendere la base  $\mathcal{F}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  ad una base  $\langle, \rangle_A$ -ortonormale per  $V$ .

(iii) Calcolare l'area del **parallelogramma**  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}'}$  contenuto in  $W$  ed il volume del **parallelepipedo**  $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$  in  $V$ .