

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1

Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 2 (11 Marzo 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ interi non nulli e si consideri il loro Massimo Comun Divisore $d := MCD(a, b) \in \mathbb{Z}^+$. Supponiamo esista un intero positivo $m \in \mathbb{Z}^+$ per cui si abbia

$$a = ma', b = mb',$$

con $a', b' \in \mathbb{Z}$ opportuni e si denoti infine con $d' := MCD(a', b') \in \mathbb{Z}^+$.

- (i) Dimostrare che $d = md'$.
- (ii) Denotati con $x, y \in \mathbb{Z}$ una coppia di interi che soddisfa l'**identità di Bezout** per $d = MCD(a, b)$, dimostrare che la stessa coppia di interi soddisfa l'identità di Bezout per $d' = MCD(a', b')$, i.e.

$$(*) \quad d = ax + by \Leftrightarrow d' = a'x + b'y,$$

per i medesimi $x, y \in \mathbb{Z}$.

- (iii) Considerati nello specifico gli interi $a = 1927, b = 2993$, determinare $d = MCD(a, b)$, determinare gli interi a', b' e m come in (i) di modo che a' e b' risultino **coprimi** o **relativamente primi**. Trovare infine tutte le possibili coppie di interi $x, y \in \mathbb{Z}$ soddisfacenti l'identità di Bezout $d = ax + by$.

Esercizio 2. Si consideri l'intero positivo $m = 3502 \in \mathbb{Z}^+$ espresso in notazione decimale, i.e. $m = 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

- (i) Utilizzare la divisione Euclidea con resto (non-negativo) per determinare l'**espressione b-adica** dell'intero

$$m = x_k x_{k-1} \cdots x_1 x_0,$$

in **base** $b = 7$. In altri termini determinare i coefficienti $x_j, 0 \leq j \leq k$, dell'espressione di m come

$$m = x_k b^k + x_{k-1} b^{k-1} + \cdots + x_2 b^2 + x_1 b^1 + x_0 b^0.$$

- (ii) Svolgere le operazioni $m + m$ e $m \cdot 3$ in base $b = 7$.

Esercizio 3. Dire quali fra le seguenti **equazioni lineari diofantee** é compatibile, i.e. ammette soluzioni o meno. Nel caso di compatibilitá descrivere inoltre tutte le soluzioni.

- (i) $2173x + 2491y = 210$;
- (ii) $2173x + 2491y = 159$.