Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 1 (12 Marzo 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V := \mathbb{C}^4$, munito di una base $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, e si consideri la forma bilineare simmetrica $b := b_A$ su V la cui matrice simmetrica rappresentativa nella base $\mathcal{E}$ selezionata e':

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la dimensione ed una base del **radicale** $V^{\perp_b} = \mathrm{rad}(V)$ della forma b, deducendo inoltre (in opportune coordinate) la **forma canonica complessa** della forma quadratica $\mathcal{Q}_b$ associata a b.
(ii) Considerato il sottospazio $W = Span\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset V$ mostrare che il sottospazio radicale $V^{\perp_b}$ è in somma diretta con W. Paragonare il radicale $V^{\perp_b}$ con il sottospazio $W^{\perp_b}$ che é il sottospazio b-ortogonale al sottospazio W. Cosa si deduce per $(W^{\perp_b})^{\perp_b}$?
(iii) Considerata la forma bilineare simmetrica $b_{|_W} \in Sym(W)$ ottenuta per restrizione di b sul sottospazio W, determinare la matrice rappresentativa di $b_{|_W}$ rispetto alla sua base $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, e determinare il luogo dei vettori $b_{|_W}$-isotropi, detto **cono $b_{|_W}$-isotropo**, nel sottospazio W.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^2$ spazio vettoriale, munito di base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, rispetto a cui si hanno coordinate $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\underline{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Si considerino le seguenti forme bilineari simmetriche:

$$b(\underline{x}, \underline{y}) := 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2,$$
$$c(\underline{x}, \underline{y}) := -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2,$$
$$d(\underline{x}, \underline{y}) := 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

(i) Stabilire quali fra esse é una forma bilineare degenere e quali no.
(ii) Nel caso della forma bilineare simmetrica b, determinare la dimensione, una base, equazione cartesiana ed equazioni parametriche del sottospazio $(Span\mathbf{e}_1)^{\perp_b}$ (rispettivamente, $(Span\mathbf{e}_2)^{\perp_b}$) che é il **sottospazio b-ortogonale** al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1)$ (rispettivamente, al sottospazio $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_2)$).
(iii) Senza utilizzare procedimenti di diagonalizzazione, dedurre quali tra le forme bilineari simmetriche date individua una forma quadratica **definita positiva** su V, quali fra esse individua una forma quadratica **indefinita** su V e quali fra esse una forma quadratica **semi-definita negativa** su V deduceno, in opportune coordinate, le rispettive **forme canoniche di Sylvester** ed esplicitando infine le relative **segnature** (cioé le rispettive coppie $(p, r-p)$ dove p=**indice di positivitá**, r=**rango** e $r-p$ =**indice di negativitá** della forma quadratica).