Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Algebra 1
Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 1 (4 Marzo 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Siano G un insieme, $* : G \times G \to G$ un'operazione binaria associativa, $e \in G$ con le seguenti proprietà:

i) per ogni $g \in G$ si ha $e * g = g$;
ii) per ogni $g \in G$ esiste $x = x(g) \in G$ tale che $x * g = e$.

Dimostrare che $(G, *)$ è un gruppo.

Esercizio 2. Determinare un insieme X dotato di un'operazione binaria associativa $* : X \times X \to X$ tale che:

i) esiste $e \in X$ per cui $e * a = a$, per ogni $a \in X$;
ii) per ogni $a \in X$ esiste $b = b(a) \in X$ per cui $a * b = e$;
iii) $(X, *)$ non è un gruppo.

Confrontare con il risultato in **Esercizio 1**.

Esercizio 3. Siano $(A, \oplus)$ un gruppo e $* : A \times A \to A$ un'ulteriore operazione binaria associativa su A, tali che:

i) esiste $1 = 1_A \in A$ per cui $1 * a = a = a * 1$, per ogni $a \in A$;
ii) $*$ é distribuitiva rispetto all'operazione $\oplus$ del gruppo A.

Dimostrare che $(A, \oplus, *)$ é un anello.

Esercizio 4. Sia $X_3 := \{1, 2, 3\}$ l'insieme formato dai tre numeri naturali dati. Consideriamo l'insieme $S(X_3)$ delle *corrispondenze* (od *applicazioni biunivoche*) *dell'insieme* X_3 *in se stesso* e denotiamo con $\circ$ il *prodotto operatorio (o di composizione)* di suddette corrispondenze.

Dimostrare che $(S(X_3),\ \circ)$ é un gruppo, detto **gruppo simmetrico su 3 elementi** (in alcuni testi tale gruppo viene denotato anche con il simbolo $(S_3,\ \circ)$ od anche $(Sym(3),\ \circ)$. Determinare in particolare:

- Card$(S(X_3))$ = *cardinalitá* di $S(X_3)$, i.e. il numero di elementi in $S(X_3)$;
- la *tabella moltiplicativa* del gruppo $(S(X_3),\ \circ)$;
- che $(S(X_3),\ \circ)$ non é un gruppo abeliano.

Esercizio 5. Sia dato un insieme $\mathbb{K} = \{a, b\}$, con $a \neq b$ dotato di due operazioni binarie $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, definite da:

$$a + a = a, \ \ a + b = b + a = b, \ \ b + b = a;$$

$$a \cdot a = a, \ \ a \cdot b = b \cdot a = a, \ \ b \cdot b = b.$$

i) Dimostrare che $(\mathbb{K},\ +)$ é un gruppo, la cui *tabella moltiplicativa* é la stessa di quella del **gruppo simmetrico su due elementi**, i.e. la stessa di

$$(S(X_2), \circ) \;\; [\text{equiv.}(S_2, \circ) = (Sym(2), \circ)],$$

ove $X_2 = \{1, 2\}$ analogamente a quanto posto in **Esercizio 4**, deducendo in particolare che $(\mathbb{K}, +)$ é un gruppo abeliano.

ii) Dimostrare che $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un campo, determinando esplicitamene la struttura del *gruppo degli invertibili* $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ del campo;

iii) Stabilire se sul gruppo $(\mathbb{K}, +)$ puó esistere un'operazione di moltiplicazione $*$, diversa da quella data $\cdot$, tale che $(\mathbb{K}, +, *)$ sia un anello (unitario).