Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 12 (4 Giugno 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Sia dato $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ il piano euclideo con riferimento cartesiano $RC(O;\ x, y)$, dove (x, y) sono le coordinate cartesiane del riferimento e si consideri la sua inclusione naturale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (x, y) & \mapsto & [1, x, y] \end{array}$$

Nelle coordinate euclidee date con l'inclusione sopra descritta, sia data $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ la **conica euclidea** di equazione cartesiana nel riferimento dato:

$$\mathcal{C}:\ f(x, y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}xy - 3y^2 + 12\sqrt{3}x - 12y - 12 = 0.$$

(i) Classificare la conica $\mathcal{C}$ dal punto di vista affine, deducendo in opportune coordinate affini (s, t) per la struttura di piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, la **forma canonica affine** di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare la **forma canonica metrica** di $\mathcal{C}$ in coordinate cartesiane (u, v) di un riferimento cartesiano $RC(O';\ u, v)$ per $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, determinando esplicitamente l'**isometria** che trasforma il riferimento $RC(O;\ x, y)$ in $RC(O';\ u, v)$ in cui $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica metrica.

(iii) Dedurre nel riferimento cartesiano originario $RC(O;\ x, y)$:
• le coordinate dell'eventuale **centro di simmetria** di $\mathcal{C}$ (oppure del **vertice** se $\mathcal{C}$ é parabola),
• le equazioni cartesiane degli **assi di simmetria** (o dell'**asse di simmetria** se $\mathcal{C}$ é parabola),
• in caso $\mathcal{C}$ sia iperbole, stabilire quale dei due assi di simmetria sia **asse trasverso**, e determinare le equazioni cartesiane dei suoi **asintoti**.

(iv) Determinare esplicitamente l'**affinitá** che trasforma il riferimento cartesiano $RC(O;\ x, y)$ nel riferimento affine $RA(O'',\ u, v)$ dove $\mathcal{C}$ assume la sua **forma canonica affine** come trovata al punto (i).

Esercizio 2. Sia dato $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ lo spazio euclideo 3-dimensionale, con riferimento cartesiano $RC(O;\ x, y, z)$, dove (x, y, z) sono le coordinate cartesiane del riferimento e si consideri la sua inclusione naturale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \mapsto & [1, x, y, z] \end{array}$$

Nelle coordinate euclidee date con l'inclusione sopra descritta, sia $\Sigma \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ la **quadrica euclidea** di equazione cartesiana

$$\Sigma:\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 2y + 2z = 0.$$

(i) Classificare la quadrica Σ dal punto di vista affine, deducendo la**forma canonica affine** di Σ in opportune coordinate affini (x', y', z') per la struttura di spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(ii) Classificare dal punto di vista affine la **conica sezione** ottenuta intersecando Σ con il piano $\pi : x + y + z = 0$.

(iii) Stabilire se la **quadrica euclidea** $\Gamma \subset \mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ **quadrica euclidea** di equazione cartesiana

$$\Gamma:\ g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy + x + z - 1 = 0$$

puó essere **congruente** a Σ oppure se puó essere **affinemente equivalente** a Σ.