Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 11 (28 Maggio 2025) - Prof. F. Flamini

Per i seguenti esercizi sia $\mathbb{K}$ il campo o $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ e sia $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ il piano proiettivo sul campo $\mathbb{K}$, con coordinate omogenee nel riferimento proiettivo standard date da $[x_0, x_1, x_2]$. Siano infine

$$\mathcal{A}_0 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_0 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2 \text{ carta affine con coordinate affini } \left(x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}\right),$$

$$\mathcal{A}_1 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_1 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2 \text{ carta affine con coordinate affini } \left(u = \frac{x_0}{x_1}, v = \frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$\mathcal{A}_2 := \{[x_0, x_1, x_2] \mid x_2 \neq 0\} \equiv \mathbb{A}^2 \text{ carta affine con coordinate affini } \left(s = \frac{x_0}{x_2}, t = \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Esercizio 1. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ la **conica proiettiva** di equazione cartesiana omogenea

$$\Gamma: \ F(x_0, x_1, x_2) = x_0x_1 - x_0x_2 + x_0^2 = 0$$

(i) Classificare la conica proiettiva Γ, deducendo la sua **forma canonica proiettiva** in opportune coordinate $[z_0, z_1, z_2]$ a seconda di $\mathbb{K}$. Determinare l'eventuale **luogo singolare** di Γ.

(ii) Classificare il luogo geometrico $\Gamma_0 := \Gamma \cap \mathcal{A}_0$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_0$, stabilire se Γ_0 é una conica affine o meno, se é singolare o meno, e determinare l'equazione cartesiana di Γ_0.

(iii) Classificare il luogo geometrico $\Gamma_1 := \Gamma \cap \mathcal{A}_1$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_1$, stabilire se Γ_1 é una conica affine o meno, se é singolare o meno, e determinare l'equazione cartesiana di Γ_1.

(iv) Classificare il luogo geometrico $\Gamma_2 := \Gamma \cap \mathcal{A}_2$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_2$, stabilire se Γ_2 é una conica affine o meno, se é singolare o meno e determinare l'equazione cartesiana di Γ_2.

Esercizio 2. Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ la **conica proiettiva** di equazione cartesiana omogenea

$$\Gamma: \ G(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1^2 - x_0x_2 = 0$$

(i) Classificare la conica proiettiva Γ, deducendo la sua **forma canonica proiettiva** in opportune coordinate $[z_0, z_1, z_2]$ a seconda di $\mathbb{K}$.

(ii) Classificare la conica affine $\Gamma_0 := \Gamma \cap \mathcal{A}_0$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_0$, a seconda di $\mathbb{K}$, stabilendo se é **parabola** oppure **conica a centro** (e nel secondo caso, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se é **ellisse** oppure **iperbole**). Se Γ_0 parabola, determinare **vertice** V e **asse**; se invece é conica a centro, determinare **centro di simmetria** ed **asintoti**.

(iii) Classificare la conica affine $\Gamma_1 := \Gamma \cap \mathcal{A}_1$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_1$, a seconda di $\mathbb{K}$, stabilendo se é **parabola** oppure **conica a centro** (e nel secondo caso, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se é **ellisse** oppure **iperbole**). Se Γ_1 parabola, determinare **vertice** V e **asse**; se invece é conica a centro, determinare **centro di simmetria** ed **asintoti**.

(iv) Classificare la conica affine $\Gamma_2 := \Gamma \cap \mathcal{A}_2$ che é **traccia** di Γ in $\mathcal{A}_2$, a seconda di $\mathbb{K}$, stabilendo se é **parabola** oppure **conica a centro** (e nel secondo caso, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se é **ellisse** oppure **iperbole**). Se Γ_2 parabola, determinare **vertice** V e **asse**; se invece é conica a centro, determinare **centro di simmetria** ed **asintoti**.