Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. S. Trapani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 10 (22 Maggio 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Sia dato lo spazio affine $\mathbb{A}^3 := \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, munito di riferimento affine $RA(O, \mathcal{E})$ che fornisce coordinate affini (x, y, z). Sia data la retta affine r passante per il punto $P = (1, 0, 1)$ e con vettore direttore $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$.

(i) Indentificando $\mathbb{A}^3$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3$ attraverso l'inclusione naturale $(x, y, z) \hookrightarrow [1, x, y, z]$, determinare in due modi differenti (**approccio proiettivo** e **approccio affine e poi completamento proiettivo**) equazioni parametriche e cartesiane omogenee della retta proiettiva $\overline{r}$ che é **completamento proiettivo** della retta affine r.

(ii) Denotato con $Q \in \mathbb{P}^3$ il punto corrispondente a r_∞=**punto improprio della retta affine** r, e con $\mathcal{H}_1$ il piano di $\mathbb{P}^3$ di equazione cartesiana omogenea $\mathcal{H}_1 : \ x_1 = 0$, determinare la dimensione del **sottospazio proiettivo congiungente** Q e $\mathcal{H}_1$, i.e. $\dim(\mathcal{L}(Q, \mathcal{H}_1)) =?$.

(iii) Denotata con π_Q la **proiezione di centro** Q **sul piano** $\mathcal{H}_1$, dedurre la dimensione della **famiglia di rette proiettive passanti per** Q (detta **stella di rette di** $\mathbb{P}^3$ **per il punto** Q) e determinare le equazioni omogenee $\pi_Q([x_0, x_1, x_2, x_3]) =?$ della proiezione di centro Q su $\mathcal{H}_1$ ed il luogo in $\mathbb{P}^3$ dove la proiezione π_Q non é definita come applicazione a valori in $\mathcal{H}_1$.

Detto $V = \mathbb{R}^4$ che fornisce $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^3$, relazionare π_Q con un'opportuna proiezione canonica da V su un opportuno **spazio vettoriale quoziente** V/W.

(iv) Determinare equazioni cartesiane omogenee di $\pi_Q(\overline{r}) \subset \mathcal{H}_1$ e di $\pi_Q(\ell) \subset \mathcal{H}_1$, dove $\ell \subset \mathbb{P}^3$ la retta proiettiva di equazioni cartesiane omogenee

$$\ell : \ x_3 = 0 = x_1 - x_2.$$

(v) Considerato lo **spazio proiettivo duale** $(\mathbb{P}^3)^* := \mathbb{P}(V^*)$, descrivere $\pi_Q(\ell)$ come proiettificato di un opportuno **sottospazio annullatore**, dando interpretazione geometrica di tale rappresentazione.

(vi) Dopo aver verificato che $\pi_Q(\ell)$ é una retta di $\mathbb{P}^3$ ottenuta come $\pi_Q(\ell) = \mathcal{H}_1 \cap \alpha$, per α piano opportuno di $\mathbb{P}^3$, determinare le coordinate omogenee in $(\mathbb{P}^3)^*$ dei punti P_α e $P_{\mathcal{H}_1}$ corrispondenti ai piani α e $\mathcal{H}_1$ di $\mathbb{P}^3$ che individuani ℓ e determinare equazioni cartesiane omogenee in $(\mathbb{P}^3)^*$ della retta $\mathcal{L}(P_\alpha, \ P_{\mathcal{H}_1})$, intepretandola come opportuna **famiglia di piani** di $\mathbb{P}^3$

Esercizio 2. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, munito di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si considerino i punti

$$P_0 = [2, -3, 1], \ P_1 = [0, 1, 1], \ P_2 = [0, 1, -1], \ M = [2, 3, 1].$$

(i) Dopo aver stabilito che la quaterna data $\acute{\text{f}}$ormata da punti in **posizione generale** in $\mathbb{P}^2$, determinare l'unica proiettivitá f di $\mathbb{P}^2$ che trasforma ordinatamente la quaterna data nella **quaterna fondamentale**

$$F_0 = [1, 0, 0], \ F_1 = [0, 1, 0], \ F_2 = [0, 0, 1], \ U = [1, 1, 1].$$

(ii) Dato $Q = [1, 1, 2] \in \mathbb{P}^2$ e denotata con r la retta proiettiva $r = \mathcal{L}(P_1, Q)$ determinare equazione cartesiana omogenea di r nelle coordinate omogenee indotte sia dal riferimento proiettivo standard F_0, F_1, F_2, U che dal riferimento proiettivo P_0, P_1, P_2, M.

(iii) Considerata la **carta affine** $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^3$, verificare che la proiettivitá f trovata in (i) induce un'**affinitá** φ su $\mathcal{A}_0$ che individua un cambiamento di riferimento affine in $\mathcal{A}_0$; determinare equazioni cartesiane affini (nei due riferimenti affini) della retta affine $r_0 := r \cap \mathcal{A}_0$ **traccia** di r in $\mathcal{A}_0$.