

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2024/2025

Corso: Algebra 1

Docente: Prof.ssa I. Damiani, Codocente: Prof. F. Flamini

Esercitazione/Tutorato 10 (6 Maggio 2025) - Prof. F. Flamini

Esercizio 1. Riconoscere che il seguente sistema di congruenze lineari

$$(*) \quad \begin{cases} 3x \equiv 9 \pmod{21} \\ 2x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

é riconducibile ad un **sistema cinese di congruenze**, cioè ad un sistema di congruenze lineari moniche della forma

$$(**) \quad \begin{cases} x \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

con $MCD(m_1, m_2) = 1$. Dedurre la compatibilità del sistema di congruenze lineari (*), utilizzare il **Teorema Cinese dei Resti** per determinare l'unica soluzione $(\text{mod } m_1 m_2)$ del sistema cinese di congruenze (**) e, da questa soluzione, dedurre tutte le soluzioni incongruenti $(\text{mod } 105)$ del sistema di congruenze lineari originario (*).

Esercizio 2. Riconoscere che il seguente sistema di congruenze lineari

$$(*) \quad \begin{cases} 2x \equiv 6 \pmod{20} \\ 3x \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$$

non é riconducibile ad un sistema cinese di congruenze ma é comunque compatibile e determinare tutte le soluzioni incongruenti $(\text{mod } 360)$ del sistema dato.

Esercizio 3. Si consideri l'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x]$, dove $\mathbb{K}$ un campo.

(i) Dimostrare che ogni ideale I in $\mathbb{K}[x]$ é **principale**, i.e. esiste $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tale che

$$I = (f(x)) = \{f(x)g(x) \mid g(x) \in \mathbb{K}[x]\}.$$

(ii) Siano $I = (x)$ e $J = (x - 1)$ ideali in $\mathbb{K}[x]$.

- (a) Dimostrare che $\frac{\mathbb{K}[x]}{I} \simeq \mathbb{K}$;
- (b) Dimostrare che $\frac{\mathbb{K}[x]}{J} \simeq \mathbb{K}$;
- (c) Dimostrare che I e J sono **ideali coprimi** in $\mathbb{K}[x]$, deducendo che $I \cap J = I \cdot J = (x^2 - x)$;
- (d) Considerato l'anello $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ **prodotto diretto** di $\mathbb{K}$ per se stesso, dimostrare che esiste un isomorfismo di anelli tra $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e $\frac{\mathbb{K}[x]}{I \cdot J} = \frac{\mathbb{K}[x]}{(x^2 - x)}$, deducendo che l'anello prodotto diretto $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ non é un **dominio di integritá**, verificando che ha **zero-divisori** ma che é privo di elementi **nilpotenti**.

(iii) Sia $I = (x)$ ideale in $\mathbb{K}[x]$ e sia $I^2 = I \cdot I = (x^2)$.

- (a) Dimostrare che l'anello quoziente $\frac{\mathbb{K}[x]}{I^2}$ non é un dominio di integritá;
- (b) Dimostrare che in $\frac{\mathbb{K}[x]}{I^2}$ tutti gli zero-divisori sono elementi nilpotenti;
- (c) Stabilire che non può esistere un isomorfismo di anelli tra $\frac{\mathbb{K}[x]}{I^2}$ e l'anello prodotto diretto $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ come in (ii).