

Corso di Laurea in Ingegneria Civile ed Ambientale, a.a. 2024-2025
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica (M-Z), a.a. 2024-2025

Diario delle lezioni del corso di Geometria

Docente: Prof. Vincenzo Di Gennaro
Co-Docente: Prof. Flaminio Flamini
Tutore: Dott. Federico Papa

I settimana.

Lezione 1 del 23/09/2024.

Capitolo 1, pp. 1-5. Cioe':

Definizione di *struttura algebrica* su un insieme non vuoto V : operazione *interna* a V ed operazione *esterna* a V . Definizione di *spazio vettoriale* V : assiomi. Commenti e motivazioni. Notazioni e terminologie: *vettori* e *scalari* (o *coefficienti*, o *pesi*). Proprietà di calcolo in uno spazio vettoriale. In particolare: esistenza ed unicità in V della soluzione dell'equazione vettoriale lineare del tipo $a \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, quando lo scalare $a \neq 0$. Applicazione: esercizio a fondo pagina 5 delle dispense, cioè *combinazione lineare* di dati vettori in V , con coefficienti (o pesi) non tutti nulli, che risulta essere uguale al vettore nullo e significato geometrico.

Lezione 2 del 25/09/2024.

Capitolo 1, pp. 6-11. Cioe':

Esempi di spazi vettoriali:

- 1) Lo spazio vettoriale nullo
- 2) Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}$
- 3) Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$: *componenti* del vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Esercizio di calcolo delle componenti di un vettore di $\mathbb{R}^2$ ottenuto come *combinazione lineare*, con *coefficienti* (o *pesi*) dati, di vettori dati.
- 4) Per ogni intero $n \geq 1$, lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^n$: vettori come *n-uple* di numeri reali. Spazio vettoriale *numerico* di "dimensione" uguale a n
- 5) Per ogni coppia di interi $m, n \geq 1$, $V = \mathcal{M}(m, n)$ spazio vettoriale delle matrici con m -righe e n -colonne; indice di riga ed indice di colonna. E' uno spazio vettoriale numerico di "dimensione" mn . $\mathbb{R}^n$ come caso particolare di $\mathcal{M}(m, n)$.
- 6) Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti reali e nell'indeterminata (od incognita) t . Grado di un polinomio; coefficiente direttore di un polinomio. $V = \mathbb{R}[t]$ e' uno spazio vettoriale che non ha "dimensione" finita.
- 7) Lo spazio vettoriale dei *vettori geometrici* $\mathcal{V}_O$: O come punto origine; segmenti orientati; somma con metodo punta-coda o con regola del parallelogramma.

Lezione 3 del 26/09/2024.

Capitolo 1, pp. 12-17 (fino a *Esempi* ESCLUSO) Cioe':

Sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V : proprietà che definiscono un sottospazio. Proprietà equivalenti per la verifica che un sottoinsieme di V sia un sottospazio. I sottospazi sono a loro volta, in maniera naturale, spazi vettoriali con la struttura ereditata dallo spazio vettoriale ambiente V . Sottospazi vettoriali *banali* di uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali *propri* non-banali di uno spazio vettoriale. Esempi di sottoinsiemi di spazi vettoriali numerici e non che sono (oppure non sono) sottospazi vettoriali. Sottospazi $\mathbb{R}[t]_{\leq h}$, per ogni intero $h \geq 1$: a differenza dello spazio vettoriale ambiente $\mathbb{R}[t]$, essi sono *finitamente generati*. Esempi geometrici per cui l'intersezione di sottospazi è un sottospazio: intersezione di rette vettoriali in $\mathbb{R}^3$. Esempi per cui l'unione di sottospazi non è un sottospazio: unione di due rette vettoriali in $\mathbb{R}^3$. *Sistemi di vettori* in uno spazio vettoriale. Vettore *cobinazione lineare* di vettori dati e con *coefficienti* (o *pesi*) dati. Vettori che *dipendono linearmente* dai vettori contenuti in un sistema di vettori dati. Esempi. Definizione di $\text{Span}(S)$, dove S sottoinsieme di V .

II settimana.

Lezione 4 del 30/09/2024.

Capitolo 1, pp. 17-23, Cioè:

Definizione di *sottospazio generato*, cioè $\text{Span}(S)$, dove S un qualsiasi sottoinsieme di uno spazio vettoriale V . Esso è sempre un sottospazio qualunque sia il sottoinsieme S . Esempi in $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbb{R}^3$. Proprietà del sottospazio generato: in particolare *monotonia* (cioè $\text{Span}(-)$ si comporta bene rispetto all'inclusione insiemistica) e *giustapposizione* (cioè $\text{Span}(S)$ è il più piccolo sottospazio - rispetto all'inclusione - a contenere S).

- *Sistema di generatori* per uno spazio vettoriale V . Esempi in $\mathbb{R}^2$ di sistemi di generatori per tutto $\mathbb{R}^2$ ed esempi di sistemi di vettori che invece generano solo un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^2$.

- Spazio vettoriale *finitamente generabile*. Esempi di spazi vettoriali finitamente generabili:

(i) $V = \{\mathbf{0}\}$,

(ii) $V = \mathbb{R}^n$, per ogni intero $n \geq 1$; *vettori canonici* di $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ che costituiscono un sistema finito di generatori per $\mathbb{R}^n$ (non è l'unica scelta possibile)

(iii) $V = \mathcal{M}(m, n)$ e *matrici elementari* $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Considerate come vettori di $V = \mathcal{M}(m, n)$ le matrici elementari sono anche chiamate *vettori canonici* dello spazio vettoriale $V = \mathcal{M}(m, n)$.

(iv) $V = \mathbb{R}[t]_{\leq h}$, per ogni intero $h \geq 1$: i polinomi $1, t, t^2, t^3, \dots, t^h$, considerati come vettori dello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq h}$ sono anche chiamati *vettori canonici* dello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]_{\leq h}$.

(v) Lo spazio tridimensionale dei vettori geometrici, i piani vettoriali di vettori geometrici, le rette vettoriali di vettori geometrici sono esempi di spazi vettoriali finitamente generabili.

- Lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[t]$ è invece uno spazio vettoriale *non-finitamente generabile*.

Lezione 5 del 02/10/2024.

Capitolo 1, pp. 24-29 (inizio pagina), Cioè:

Esercizio svolto per un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'annullarsi di un'equazione lineare omogenea: precisamente $W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\}$; abbiamo verificato che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Poi lo abbiamo esibito come $W = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ determinati direttamente dall'equazione definente W introducendo parametri liberi per le soluzioni, verificando dunque che W è un sottospazio finitamente generabile di $\mathbb{R}^3$, dove NESSUNO tra i due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ poteva essere eliminato per poter generare tutto W . Poi abbiamo considerato $W' = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, dove i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ come a pagina 24 delle dispense ad inizio Paragrafo 7. Abbiamo verificato che i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ soddisfacevano l'equazione di W , da cui abbiamo dedotto che $W' \subseteq W$. Poi abbiamo fatto vedere che $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$; quindi abbiamo dedotto che si aveva anche

$$W' = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2),$$

cioè che $\mathbf{u}_3$ era *sovraabbondante* per generare W' . Abbiamo commentato inoltre che, comunque si sceglievano a coppie $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, si generava sempre W' con queste coppie. Abbiamo infine verificato che $W = W'$, facendo vedere inoltre che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ erano combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e viceversa.

Il precedente esercizio ha motivato le definizioni successive a partire da fondo pagina 24:

- (i) *Relazioni* banali e non-banali per un sistema di vettori dato;
- (ii) Sistema di vettori *linearmente indipendente* (o *sistema libero*).
- (iii) Sistema di vettori *linearmente dipendente* (o *sistema legato*).

- Condizioni per avere sistemi di vettori liberi oppure legati: sistema vuoto, sistema con un solo vettore, sistema con due vettori, sistema con tre vettori,
- Sistemi di 1, 2 o 3 vettori geometrici (quando formano sistemi liberi e quando formano sistemi legati: condizione di *allineamento*, condizione di *complanarità*).
- Se un sistema di vettori contiene il vettore nullo, oppure contiene una ripetizione di un vettore oppure contiene un vettore che è combinazione lineare degli altri, allora il sistema è SEMPRE legato
- Proprietà dei sistemi di vettori: dimostrate da (1) a (5).

Lezione 6 del 03/10/2024.

Capitolo 1, pp. 29-34 (saltando dimostrazione del teorema e enunciato Lemma Steinitz), Cioè:

- Proprietà (6), (7), (8) di sistemi liberi e sistemi legati e loro dimostrazioni. Esempi e controesempi.
- Criterio operativo per riconoscere un vettore sovraabbondante in un sistema di vettori.
- *Metodo degli scarti successivi* per estrarre un sistema libero da un sistema di vettori
- *Base* di uno spazio vettoriale finitamente generabile.
- I vettori canonici dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, oppure di $\mathcal{M}(m, n)$, oppure di $\mathbb{R}[t]_{\leq h}$, oppure dello spazio dei vettori geometrici $\mathcal{V}_O$ costituiscono una loro base
- Enunciato: Teorema di esistenza di una base per uno spazio vettoriale V f.g. Inoltre due basi di V hanno stessa cardinalità. (Dimostrazione di questo teorema insieme al Lemma di Steinitz la prossima volta)
- Pertanto la definizione di *dimensione* di uno spazio vettoriale V f.g., $\dim(V)$, è una buona definizione.
- Calcolo delle dimensioni degli spazi vettoriali fino ad ora studiati: $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}(m, n)$, $\mathbb{R}[t]_{\leq h}$, $\mathcal{V}_O$, ecc

III settimana.

Lezione 7 del 07/10/2024.

Capitolo 1, pp. 32-37, Cioe':

- Dimostrazione di esistenza di una base $\mathcal{B}$ per ogni spazio vettoriale V f.g.
- Enunciato e dimostrazione del *Lemma di Steinitz* (o *sostitutivo*)
- Dimostrazione che due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di un medesimo spazio vettoriale f.g. V hanno stessa cardinalita' (conseguenza del Lemma di Steinitz)
- **Osservazione:** come conseguenza del Teorema di esistenza di basi di uno spazio vettoriale f.g. che necessariamente hanno stessa cardinalita', la definizione data la volta scorsa di *dimensione* di uno spazio vettoriale f.g. V , cioe' $\dim(V)$, e' una *buona definizione*, cioe' non dipende dalla scelta di una base $\mathcal{B}$ per V ma e' *INTRINSECA* per V f.g.
- Dimostrazioni delle proprieta' da (1) a (8) a pagina 35; precisamente le proprieta' che legano i concetti di dimensione con il numero di vettori in un sistema di generatori, o con il numero di vettori in un sistema libero, con l'**estensione** di un qualunque sistema libero ad una base, con l'**estrazione** di una base da un qualunque sistema di generatori (per facilitare l'analisi abbiamo usato per esempio il **metodo degli scarti successivi**), sottospazi W di uno spazio vettoriale f.g. V sono f.g., inoltre $\dim(W)$ e' sempre minore od uguale a $\dim(V)$ e vale l'uguale se e solo se $V = W$.
- Esempi e controesempi

Lezione 8 del 09/10/2024.

Capitolo 1, pp. 37-40, Cioe':

- Dimostrazione che l'intersezione $U \cap W$ di due sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V e' sempre un sottospazio di U , di W e di V .
- Non e' vero in generale per $U \cup W$. Controesempi.
- Pero' se ad esempio $U \subseteq W$ allora $U \cup W = W$ e' sottospazio di V .
- In generale ho bisogno di definire il *Sottospazio somma* dei due sottospazi U e W dati, cioe' $U + W \subseteq V$.
- Per V f.g. ed U e W suoi sottospazi, se $\mathcal{B}_U$ e' una base di U e $\mathcal{B}_W$ e' una base di W , allora $U + W = \text{Span}(\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W)$ ma **in generale** $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ **NON E'** una base per $U + W$ ma solo un sistema di generatori per $U + W$. Esempi vari.
- *Formula di Grassmann:* fornisce dei *vincoli* alla mutua posizione di sottospazi U e W in uno spazio vettoriale V f.g. di data dimensione. Esempi vari.
- Dimostrazione della *Formula di Grassmann*.
- Conseguenza di Formula di Grassmann: e V spazio vettoriale f.g. t.c. $\dim(V) = n$, utilizzando $\dim(U) = m$ e $\dim(W) = k$ ed il fatto che $\dim(U + W) \leq \dim(V) = n$, basta osservare se $m + k > n$ per capire sicuramente che $U \cap W$ e' necessariamente non-banale.
- Definizione di spazio vettoriale V che e' *somma diretta* di due suoi sottospazi U e W , cioe' $V = U \oplus W$
- Dimostrazioni di proprieta' a fondo pagina 40: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Lezione 9 del 10/10/2024.

Capitolo 1, pp. 40-42; Capitolo 2, pp. 1-5 (saltando per ora a pg. 2: *diagonale principale, matrice simmetrica, matrice diagonale, matrice triangolare sup e triangolare*

inf che enunceremo la prossima volta, e a fondo pg. 5: *matrice identita'* che enunceremo prossima volta), Cioe'

- Abbiamo completato la dimostrazione che le proprieta' da (i) a (vii) sono tutte equivalenti: in particolare *scritture uniche* in $V = U \oplus W$ e comportamento delle *basi* dei sottospazi addendi U e W della somma diretta (l'unione delle due basi e' sempre una base per V).
- Estensione al caso di *somma diretta* con $r \geq 2$ addendi diretti: $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_r$.
- **MATRICI**: se $A \in \mathcal{M}(m, n)$ significato dei simboli A_i e A^j , per $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$
- *Trasposta* di una matrice. Caso particolare di un vettore numerico $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}(1, n)$ e del suo trasposto $\mathbf{x}^T \in \mathcal{M}(n, 1)$
- *Prodotto punto* tra due vettori numerici $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$; si interpreta come *prodotto* della matrice riga $\mathbf{x}$ con la matrice colonna $\mathbf{y}^T$, cioe' $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \circ \mathbf{y}^T \in \mathbb{R}$.
- Queste definizioni ci hanno permesso di definire in generale cosa si intende per *prodotto righe per colonne* tra due matrici: condizioni di compatibilita', cioe' sotto quali condizioni il prodotto tra matrici e' definito.
- Pure se $A \circ B$ e' definito, puo' capitare che $B \circ A$ non sia nemmeno definito.
- Pure se definiti i prodotti in entrambi i versi, vengono risultati in spazi di matrici completamente diversi: se ad esempio consideriamo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}(1, n)$, allora $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^T \in \mathbb{R} = \mathcal{M}(1, 1)$ mentre $\mathbf{y}^T \circ \mathbf{x} \in \mathcal{M}(n, n)$.
- Caso $m = n$ cioe' *matrici quadrate*. Il prodotto righe per colonne $\circ$ e' sempre definito. In particolare $(\mathcal{M}(n, n), +, \cdot, \circ)$ risulta un'algebra, precisamente *l'algebra delle matrici quadrate di ordine n*.
- L'algebra delle matrici quadrate di ordine n : non e' commutativa; ammette *zero-divisori* cioe' esistono matrici $A, B \neq O$ per cui invece si abbia $A \circ B = O$, dove O matrice nulla.

IV settimana.

Lezione 10 del 14/10/2024.

Capitolo 2, pp. 4-8, Cioe':

- Proprieta' del prodotto righe per colonne: associativita', distributivita'.
- Particolari matrici quadrate: matrici *simmetriche*, matrici *triangolari superiori*, matrici *triangolari inferiori*, matrici *diagonali*.
- Formano dei sottospazi propri di $\mathcal{M}(n, n)$. Calcolo delle dimensioni e basi di questi sottospazi per $n = 2$
- La *matrice identica* in $\mathcal{M}(n, n)$.
- In particolare $(\mathcal{M}(n, n), +, \cdot, \circ)$ e' un'algebra *associativa, non-commutativa, unitaria, non-integra*.
- Matrice (quadrata) *invertibile*.
- Se la matrice inversa di una matrice A esiste, e' univocamente determinata e si denota con A^{-1} . Proprieta' delle matrici invertibili.
- Calcolo esplicito dell'inversa di una matrice invertibile $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2, 2)$: condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di A^{-1} e' che $ad - bc \neq 0$.
- Proprieta' delle *trasposte* di matrici rettangolari $\mathcal{M}(m, n)$.

Lezione 11 del 16/10/2024.

Capitolo 2, pp. 8-18 (saltando pp. 15-16 che vediamo domani), Cioe':

- *Spazio delle righe* $\mathcal{R}_A$ e *Spazio delle colonne* $\mathcal{C}_A$ di una matrice rettangolare $A \in \mathcal{M}(m, n)$.
- Il *Teorema del rango* (**NO DIMOSTRAZIONE**). Significati geometrici.
- *Rango* di una matrice rettangolare $A := rk(A)$.
- Dal Teorema del rango segue che il rango di una matrice A e' uguale al rango della sua matrice trasposta A^T . Infatti $\mathcal{C}_A = \mathcal{R}_{A^T}$. Pertanto consideriamo principalmente *Spazi di righe* ed operazioni "naturali" su esse.
- Se una matrice A ha m righe e n colonne, allora $rk(A) \leq \min\{m, n\}$. Quando vale l'uguaglianza, allora la matrice A si dice di *rango massimo*. In particolare, una matrice quadrata A di ordine n ha rango massimo se e solo se $rk(A) = n$ cioe' se e solo se le righe di A (equivalentemente le colonne di A) costituiscono una *base* di $\mathbb{R}^n$.
- Saper calcolare il rango di una matrice $A \in \mathcal{M}(m, n)$ e' equivalente a saper calcolare la dimensione di un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$: precisamente gli m generatori di W sono posti a formare le m righe di A e calcolare $rk(A)$ fa determinare quanti fra questi m generatori sono linearmente indipendenti quindi si ottiene in particolare $\dim(W) = rk(A)$.
- Definizione di *Sottomatrice* M di una matrice rettangolare A .
- Se M e' una sottomatrice di A allora $rk(M) \leq rk(A)$.
- Come calcolare il rango di una matrice A ? Od utilizzando le *operazioni elementari* sulle righe di A oppure sfruttando opportune sottomatrici di A e calcolando il *determinante* di queste sottomatrici. Vedremo entrambi gli approcci.
- **I Approccio:** le tre *operazioni elementari* p_{ij} , $e_{ij}(k)$ e $e_i(k)$ sulle righe di una matrice A (le operazioni elementari sulle colonne, e tutto cio' che ne deriva, e' esattamente equivalente a quanto descritto sulle righe, a meno di passare alla trasposta A^T , e per il momento non lo consideriamo).
- Esempi vari di operazioni elementari sulle righe di una data matrice rettangolare A .
- Ciascuna delle tre operazioni elementari sulle righe di una matrice rettangolare $A \in \mathcal{M}(m, n)$ si puo' interpretare in termini di prodotto righe per colonne a sinistra $E \circ A$, dove $E \in \mathcal{M}(m, m)$ una *matrice elementare* quadrata di ordine m .
- Descrizione esplicita della matrice elementare E corrispondente a ciascuna delle tre operazioni elementari sulle righe p_{ij} , $e_{ij}(k)$ e $e_i(k)$.
- Matrici *equivalenti per righe*: $A \sim_r B$.
- Se due matrici A e B sono equivalenti per righe, allora $\mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B$ perche' le operazioni elementari sono operazioni rispetto cui $\mathcal{R}_A$ e' stabile (essendo un sottospazio).
- In particolare, $A \sim_r B$ implica $rk(A) = rk(B)$, cioe' matrici equivalenti per righe hanno lo stesso rango.
- Svolgimento dell'esercizio a pagina 18 delle dispense per dare un "assaggio" di come trovare una matrice S equivalente per righe ad una data A che abbia una forma particolarmente esplicita per la determinazione di $rk(A) = rk(S)$ (cioe' S *ridotta a scala o a gradini*).

Lezione 12 del 17/10/2024.

Capitolo 2, pp. 15-22, Cioe':

- *Pivot* per riga di una matrice rettangolare. *Pivot* per colonna di una matrice rettangolare.
- La nozione di *matrice a scala* (o *a gradini*) per righe. Proprieta' delle matrici a scala per righe.

- L'algoritmo di *Gauss* per ridurre a scala una matrice.
- Per calcolare $rk(A)$ di una qualsiasi matrice rettangolare A e' sufficiente ridurre A a scala utilizzando le operazioni elementari sulle righe di A , determinando cioe' una matrice S che e' a scala per righe ed equivalente per righe ad A e poi contare le righe non-nulle (equivalentemente i pivots per riga) della matrice S .
- Esempi di applicazioni dell'algoritmo di Gauss.
- Se $A \in \mathcal{M}(m, n)$ e $B \in \mathcal{M}(n, p)$ allora $rk(A \circ B) \leq rk(A)$ (dimostrazione)
- Se $A \in \mathcal{M}(m, n)$ e $B \in \mathcal{M}(n, p)$ allora $rk(A \circ B) \leq rk(B)$ (dimostrazione)
- Se si moltiplica $A \in \mathcal{M}(m, n)$ a destra (equiv. a sinistra) per una matrice quadrata invertibile, il rango non cambia (dimostrazione)
- Sia A matrice quadrata di ordine n . Ricordiamo che dire che A e' di rango massimo, cioe' $rk(A) = n$, e' equivalente a dire che: le righe di A costituiscono una base per $\mathbb{R}^n$, equivalentemente, le colonne di A (a meno di trasposizione) costituiscono una base per $\mathbb{R}^n$, equivalentemente, la matrice a scala S , che si ottiene come riduzione a scala per righe dalla matrice A , e' una matrice *triangolare superiore* dove gli elementi sulla diagonale principale sono tutti non-nulli.
- Sia A una matrice quadrata di ordine n . Allora A di rango massimo, cioe' $rk(A) = n$ se e solo se A matrice invertibile (dimostrazione). Le due nozioni sono equivalenti a dire che le n righe (oppure le n colonne) di A costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.

V settimana.

Lezione 13 del 21/10/2024.

Capitolo 2, p. 23, Paragrafo 5 (le prime 9 righe), poi passare a Paragrafo 7, pp. 30-33, per poi tornare indietro pp. 24-29 ma con le proprieta' dimostrate utilizzando solo la definizione di determinante come sviluppo secondo Laplace (non usare permutazioni), Cioe':

- Definizione di *determinate* di una matrice quadrata A di ordine 1 e 2.
- Definizione di *complemento algebrico* (o *cofattore*) del posto (i, j) di una matrice quadrata A di ordine n .
- Determinante di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 3$ utilizzando la regola dello *sviluppo di Laplace*; e' una formula ricorsiva che riduce il calcolo del determinante via via ad una somma algebrica di determinanti di matrici di ordine 2.
- Proprieta' elementari del determinante (Proprieta' 1-9 a pp. 23-24 ma dimostrate utilizzando la definizione di determinante con regola di Laplace e non con l'utilizzo permutazioni).
- Determinante ed operazioni elementari: come le tre operazioni elementari modificano il valore del determinante?
- Conseguenze: (i) $\det(A) \neq 0$ se e solo se $\det(S) = (\prod_{i=1}^n s_{ii}) \neq 0$, dove S e' la matrice triangolare superiore che e' la ridotta a scala di A ; (ii) $\det(A) \neq 0$ se e solo se gli elementi s_{ii} , $1 \leq i \leq n$, sulla diagonale principale di S sono tutti non-nulli.
- Primo corollario a pagina 29 che lega i tre concetti fondamentali di *rango*, *determinante* ed *invertibilita'* per una matrice quadrata A di ordine $n \geq 1$: data A matrice quadrata di ordine $n \geq 1$, vale che

$$rk(A) = n \Leftrightarrow A \text{ invertibile} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Ricordiamo inoltre che abbiamo già dimostrato nella Lezione 12 che essere A quadrata di ordine n invertibile (equivalentemente di rango massimo n) è equivalente a dire che le n righe (oppure le n colonne) di A costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.