

Settembre 2024

Esercizio 1

(i) Notiamo che il minore

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) \geq 2$$

Gli orlati di questo sono

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (0 + 8 + 8) - (0 + 16 + 0) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = (0 - 8 - 10) - (0 - 16 - 2) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix} = (0 - 10 - 8) - (0 - 16 - 2) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix} = (0 + 10 + 10) - (16 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(V^{\perp_b}) = 4 - 2 = 2$$

(ii) Visto che $V^{\perp_b} = \operatorname{Ker}(A) = \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

$$x_4 = t$$

$$x_3 = s$$

$$x_1 = -2s + 2t$$

$$x_2 = 5x_4 - 4x_3 - 4x_1 = 5t - 4s - 4(-2s + 2t) = 4s - 3t$$

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t - 2s \\ -3t + 4s \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\} \text{ base di } V^{\perp_b}$$

Poiché $\operatorname{rg}(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$ $\det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^4 = V^{\perp_b} \oplus W$$

(iii) $b|_W \bar{e} \begin{pmatrix} b(\underline{e}_2, \underline{e}_2) & b(\underline{e}_2, \underline{e}_3) \\ b(\underline{e}_3, \underline{e}_2) & b(\underline{e}_3, \underline{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ il campo isotropo in $W \bar{e}$

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (x \ y) \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix} = 4xy = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{b|W} = \operatorname{Span}\{\underline{e}_2\} \cup \operatorname{Span}\{\underline{e}_3\}$$

(i) $\varphi = [A]$ dove $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$X_0 = 0$ è retta stabile ma non retta di punti fissi

I punti fissi di φ sono dati da

$$\begin{aligned} P_A(t) &= \det \begin{pmatrix} 3-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & 4 \\ 2 & 2 & 3-t \end{pmatrix} = (3-t)^2(1-t) - 8(3-t) = \\ &= (3-t) [(3-t)(1-t) - 8] = (3-t) [3 - 4t + t^2 - 8] \\ &= (3-t) (t^2 - 4t - 5) \end{aligned}$$

$t = 3$ autovalore

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \varphi \text{ ha 3 punti fissi distinti}$$

Notiamo che

$X_1 = 0$ è retta fondamentale t.c.

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda + 4\mu \\ 2\lambda + 3\mu \end{pmatrix}$$

$X_2 = 0$ è retta fondamentale t.c.

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda + \mu \\ 2\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

non sono rette
stabili per φ

(ii) Poiché $X_0 = 0$ è retta φ -stabile $\Rightarrow \varphi$ proviene dall'infinità

$$\varphi_0(x, y) = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

(iii) La retta π passa per $P = (0, 3)$ e ha vettore direttore $N_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \varphi_0(\pi)$ è la retta per $\varphi_0(P) = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/3 \\ 11/3 \end{pmatrix}$

e con vettore direttore $\begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 - 8/3 \\ 2/3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\varphi_0(\pi): \det \begin{pmatrix} x - \frac{13}{3} & y - \frac{11}{3} \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

ed ovviamente $\varphi(\pi) = \overline{\varphi_0(\pi)}$

Esercizio 3

(3)

(i) Per costruzione Σ è un paraboloide ellittico di vertice $V=0$

Per equazione cartesiana di Σ , consideriamo

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad P \in \mathcal{O}^+ \text{ punto arbitrario}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \cdot (\sin \theta) \\ t^2 \\ t \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \theta \in [0, 2\pi] \\ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad x = -t \sin \theta$$

$$y = t^2$$

$$z = t \cos \theta$$

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= t^2 \sin^2 \theta + t^2 \cos^2 \theta = \\ &= t^2 = y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Sigma: y = x^2 + z^2$$

(ii) Essendo Σ quadrica generale e $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^+ \subset \Sigma$

$\Rightarrow P$ è semplice per Σ

$$T_P(\Sigma): (1, 0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (-1/2 \quad 0 \quad -1/2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y + z = 0$$

$$T_P(\Sigma): 2z - y - 1 = 0$$

$$(iii) \quad \mathcal{A}: \Sigma \cap T_P(\Sigma) = \begin{cases} y = 2z - 1 \\ y = x^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z - 1 \\ 2z - 1 = x^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2z - 1 \\ x^2 + z^2 - 2z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2z - 1 \\ x^2 + (z-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$: ellisse degenera punto focale

come da aspettarsi perché

Σ paraboloide ellittico