

Settembre 2024Esercizio 1(i) se  $E$  base canonica di  $\mathbb{R}^4$  e  $E'$  base canonica di  $\mathbb{R}^2$ , allora

$$M_{E',E}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(\varphi) = 2 = \dim(\operatorname{Im} \varphi) = \dim(\mathbb{R}^2) \text{ cioè } \varphi \text{ suriettiva}$$

$$\Rightarrow \dim(W) = \dim(\ker \varphi) = 4 - \operatorname{rg}(\varphi) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^4/W) = 4 - 2 = 2$$

Notiamo che

$$\ker(\varphi) = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{i.e. } W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \text{ i.e. } \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\{\underline{e}_2, \underline{e}_3\}$$

$$\Rightarrow B = \{[\underline{e}_1], [\underline{e}_4]\} = \{\pi(\underline{e}_1), \pi(\underline{e}_4)\}$$

$$(ii) \quad \underline{v}_2 = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 = \underline{v}_1 + \underbrace{\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3}_W$$

$$\Rightarrow [\underline{v}_1] = [\underline{v}_2] \text{ visto che } \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \in W$$

$$\text{Dunque } \pi(\underline{v}_1) = \pi(\underline{v}_2) \in \mathbb{R}^4/W$$

(iii)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 \\ \pi \searrow & & \nearrow \overline{\varphi} \\ & \mathbb{R}^4/W & \end{array}$$

$$\operatorname{Im}(\overline{\varphi}) = \operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2 \text{ mentre } \pi(U) = \operatorname{span}\{\pi(\underline{v}_1), \pi(\underline{v}_2)\} = \operatorname{span}\{\pi(\underline{v}_1)\} \text{ da (ii)} \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\pi(U)) = 1$$

Perciò  $\overline{\varphi}|_{\pi(U)}$  non è isomorfismo con  $\operatorname{Im}(\overline{\varphi})$ .



(i)  $\dim(\mathcal{L}_1) = 1$  siccome siamo in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ , una retta proiettiva ha codimensione 3  $\Rightarrow$  equazioni cartesiane omogenee sono

$$\begin{cases} x_0 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(ii)  $\dim(\mathcal{L}_2) = 4 - 2 = 2$ ,  $\mathcal{L}_2$  è un piano proiettivo e sue eq. parametriche omogenee sono

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha \\ x_1 &= \beta \\ x_2 &= \beta \\ x_3 &= \gamma \\ x_4 &= \alpha \end{aligned}$$

$$[\alpha, \beta, \gamma] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$$

(iii)  $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ :  $\begin{cases} x_0 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 = x_2 = x_0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.}$

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{ [1, 1, 1, 0, 1] \}$$

Notare che  $0 = \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) > \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - 4 = 1 + 2 - 4 = -1$

$\Rightarrow \mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  no in pos. generale in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_0 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{visto che un punto ha codim} = 4 \text{ in } \mathbb{P}^4$$

Per Grassmann proiettiva

$$\dim(\mathcal{L}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)) = \dim(\mathcal{L}_1) + \dim(\mathcal{L}_2) - \dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1 + 2 - 0 = 3$$

$\mathcal{L}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  è un iperpiano in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$

$$\text{det} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{cases} = 0$$



# Esercizio 3

③

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = 3 \quad \text{rg}(A_0) = 2 \quad \det(A_0) = -4 < 0$$

$\mathcal{C}$  è iperbole generica

Centro  $C = (0, 0) = O$

$$x^2 - 4y^2 = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - 2y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = 1 \quad \text{f.c.m.}$$

Il RC(0, x, y) è già il riferimento richiesto

$$(ii) \quad \begin{cases} X=1 \\ \mathcal{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=1 \\ 1 - 4y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=1 \\ 4y^2 = -1 \end{cases} \quad \nexists \text{ sol. reale}$$

$\Rightarrow X=1$  è retta esterna a  $\mathcal{C}$

$$d(C, r) = d(O, r) = \frac{|0 - 1|}{1} = 1$$

(iii) Il diametro è la retta affine per  $O$  con vettore direttore  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  cioè

$$d: x - 4y = 0$$

Non è asintoto, visto che gli asintoti di  $\mathcal{C}$  sono

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}y = 0$$

$\Downarrow$

$$x - 2y = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}y = 0$$

$\Downarrow$

$$x + 2y = 0$$