Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

II Appello - Luglio 2024

- Scrivere negli appositi spazi **COGNOME & NOME**
- Svolgere i quesiti proposti in **3 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME:

Esercizio 1. Sia dato lo spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, con riferimento affine $RA(O; \mathcal{E})$, e siano date coordinate affini (x, y, z) rispetto al riferimento affine considerato. Si considerino in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il punto $P = (1, 1, 0) \in \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, espresso in coordinate affini rispetto al riferimento dato, e le rette di equazioni cartesiane nel riferimento dato:

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Si consideri infine l'inclusione di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ data da

$$(x, y, z) \mapsto [1, x, y, z],$$

i.e. identificando $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ con la carta affine $\mathbb{A}_0^3$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

(i) Stabilire la mutua posizione delle rette affini r e s , i.e. se r e s sono coincidenti, oppure incidenti, oppure parallele distinte oppure sghembe. Determinare le coordinate omogenee dei rispettivi punti impropri di r e s ; stabilire inoltre se esiste un piano affine di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ che contenga entrambe le rette r e s ed, in caso di risposta affermativa, determinare l'equazione cartesiana di tale piano affine.

(ii) Denotate con $\bar{r}$ e $\bar{s}$ le chiusure proiettive delle rette affini, rispettivamente, r e s , stabilire se $\bar{r}$ e $\bar{s}$ sono in *posizione generale* in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ e determinare inoltre equazioni cartesiane omogenee del sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(\bar{r}, \bar{s})$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ congiungente $\bar{r}$ e $\bar{s}$.

(iii) Stabilire se $P \in \mathcal{L}(\bar{r}, \bar{s})$ ed, in caso di risposta negativa, determinare equazioni cartesiane omogenee del sottospazio intersezione $\alpha := \mathcal{L}(\bar{r}, \bar{s}) \cap \mathcal{L}(P, \bar{r})$, deducendo inoltre equazioni cartesiane affini del sottospazio affine $\alpha_0 \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ottenuto come traccia del sottospazio proiettivo $\alpha \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ nella carta $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, e sia $\mathcal{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$ la base duale di $\mathcal{E}$. Siano dati i vettori

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3,$$

espressi in combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{E}$.

(i) Posto $U := \text{Span}\{\mathbf{v}_2\} \subset V$, determinare una base del sottospazio $\text{Ann}(U) \subset V^*$ e sue equazioni parametriche e cartesiane in opportune coordinate su V^* indotte dalla base duale $\mathcal{E}^*$.

(ii) Dato il funzionale $\varphi = \mathbf{e}_1^* - \mathbf{e}_2^* - 2\mathbf{e}_3^* \in V^*$, stabilire se $\varphi \in \text{Ann}(U)$. In caso di risposta negativa, determinare allora la dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}(\varphi) + \text{Ann}(U)$ stabilendo inoltre se la somma e' somma diretta in V^* .

(iii) Dopo aver verificato che $\mathcal{V} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e' una base di V , stabilire se il funzionale $\varphi \in V^*$ introdotto al punto (ii) e' un elemento della base duale $\mathcal{V}^*$ di V^* .

Esercizio 3. Nello spazio affine reale $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, con riferimento affine $RA(O; \mathcal{E})$ siano date coordinate affini (x, y, z) rispetto al riferimento affine considerato. Si consideri la quadrica Σ di equazione caartesiana

$$\Sigma : x^2 - 8y^2 - z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + x - y = 0.$$

- (i) Classificare Σ dal punto di vista affine, stabilendo inoltre se e' doppiamente rigata o meno, e dedurre la forma canonica affine di Σ , in un opportuno riferimento affine (O', x', y', z') (NB: non e' necessario ridurre esplicitamente a forma canonica affine l'equazione di Σ).
- (ii) Stabilire se l'origine O del riferimento e' punto *semplice*, equivalentemente non-singolare, per Σ ed, in caso di risposta affermativa, determinare l'equazione cartesiana del piano tangente $T_O(\Sigma)$ alla quadrica Σ nel suo punto semplice O .
- (iii) Considerando la conica sezionale $\mathcal{C} = \Sigma \cap T_O(\Sigma)$, classificare dal punto di vista affine la conica $\mathcal{C}$, fornendo inoltre una motivazione geometrica (legata alla classificazione di Σ data al punto (i)) della presenza su Σ di una conica di tipologia affine come quella stabilita per la conica $\mathcal{C}$.

$$(i) \quad \underline{N}_{\tau} : \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{N}_{\tau} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\underline{N}_{\tau}$ soddisfa anche le equazioni della giacitura di s

$$\text{cioè } \begin{cases} 3x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \tau \text{ e } s //$$

Siccome τ e s sono contenute in 2 piani paralleli $\Rightarrow \tau \neq s$
 $\Rightarrow \tau$ e s rette parallele distinte

Si ha

$$\tau_{\infty} = s_{\infty} = [0, 1, -1, 2] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

Il fascio di piani di asse $\bar{\tau}$

$$\lambda(x+y-1) + \mu(2x-z-3) = 0$$

Poiché $Q = (0, 1, 0) \in s \Rightarrow$ passaggio per Q fornisce

$$\lambda(1-1) + \mu(0-0-3) = 0 \Rightarrow -3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Pertanto il piano $\bar{\tau} = \boxed{\beta; x+y-1=0}$ è piano che contiene τ e s .

(ii) $d(\bar{\tau}, \bar{s}) = \bar{\beta}; x_1+x_2-x_0=0$
 e $\bar{\tau}$ e $\bar{s}$ non in posizione generale in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ perché rette incidenti

(iii) P punto proprio e $P \notin \tau \Rightarrow P \notin \bar{\tau} \Rightarrow$

$\gamma := d(P, \tau)$ è un piano $\gamma \subset \mathbb{P}^3$ mentre $d(\bar{\tau}, \bar{s}) = \bar{\beta}$

$$\gamma: \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 0 \quad P = [1, 1, 1, 0] \quad \tau_{\infty} = [0, 1, -1, 2] \quad \text{e } k = [1, 0, 1, -3] \in \Gamma \Rightarrow 3x_0$$

$\gamma \cap \bar{\beta}$ è una retta di $\mathbb{P}^3$. Visto che $\bar{\tau} \subset \bar{\beta}$ e $\bar{\tau} \subset \gamma$

$$\Rightarrow \gamma \cap \bar{\beta} = \bar{\tau} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_0 = 0 \\ 2x_1 - x_3 - 3x_0 = 0 \end{cases}$$

e $x_0 = \tau$ ovviamente.

Esercizio 2

(2)

(i) $\dim(U) = 1 \Rightarrow \dim(\text{Ann}(U)) = 2$

Poiché $\underline{v}_2 = \underline{e}_3 \Rightarrow \mathcal{B}_{\text{Ann}(U)} = \{ \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^* \}$ se $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ coord. in V^*
 $\Rightarrow \alpha_3 = 0$ eq. cart. di $\text{Ann}(U)$ e eq. param. $\begin{cases} \alpha_1 = t \\ \alpha_2 = s \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} (t, s) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $\varphi \notin \text{Ann}(U)$ visto che $\varphi = \underline{e}_1^* - \underline{e}_2^* - 2\underline{e}_3^*$. Pertanto

$$\dim(\text{Ann}(U)) = 2 < \dim(\text{Span}\{\varphi\} + \text{Ann}(U)) \leq \dim(V^*) = 3$$

$\Rightarrow \text{Span}\{\varphi\} + \text{Ann}(U) = V^*$ ed inoltre la

forma è necessariamente diretta $\Rightarrow V^* = \text{Span}\{\varphi\} \oplus \text{Ann}(U)$

(iii) $M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(\mathcal{N}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{N}$ base

Notiamo che

$$\varphi(\underline{v}_1) = \varphi(2\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = 2 - 1 = 1$$

$$\varphi(\underline{v}_2) = \varphi(\underline{e}_3) = -2$$

$\Rightarrow \varphi \notin \mathcal{N}^*$

$$\varphi(\underline{v}_3) = \varphi(\underline{e}_1 + \underline{e}_3) = 1 - 2 = -1$$

Esercizio 3

(3)

(i) $\det(A) > 0 \Rightarrow \Sigma$ generale

$\det(A_0) = 0$ anzi $\text{rg}(A_0) \Rightarrow \Sigma$ parabolico iperbolico
e 2 rette $\Rightarrow \bar{\Sigma}$ doppiamente rigato

La sua f.c.a. è

$$z' = (x')^2 - (y')^2$$

(ii) $O \in \Sigma$ ed è liscio perché Σ è generale

$$T_0(\Sigma): x - y = 0$$

$$(iii) \ell: \Sigma \cap T_0(\Sigma) = \begin{cases} -7x^2 - z^2 + 2x^2 - 2xz - 6xz = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5x^2 - z^2 - 8xz = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 8xz + z^2 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

se $z = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ troviamo punto $O = (0, 0, 0)$

Per tanto $z \neq 0$ e $t := \frac{x}{z} \Rightarrow 5t^2 + 8t + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 64 - 20 > 0 \Rightarrow$ si fattorizza in 2 termini lineari

$\Rightarrow \ell$ è iperbole degenera, cioè unione di 2 rette in c.

$\ell \subset \Sigma$ proprio perché doppiamente rigato