Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

I Appello - Giugno 2024

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **3 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Si consideri il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ (ottenuto come complessificazione dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$), munito di base reale $\mathcal{E} := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, determinata dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$, e del complessificato $\langle\ ,\ \rangle_S$ del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$. Si considerino (x, y, z) le coordinate complesse su $\mathbb{C}^3$ individuate dalla base reale $\mathcal{E}$.
(i) Dato il $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale $W := Span_{\mathbb{C}}\{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2\}$, dove

$$\underline{v}_1 = (2i)\underline{e}_1 - i\underline{e}_2 + (1+i)\underline{e}_3 \ \text{ e } \ \underline{v}_2 = (-2i)\underline{e}_1 + i\underline{e}_2 + (1+i)\underline{e}_3$$

e dove i denota l'unitá immaginaria, i.e. $i^2 = -1$, determinare $\dim_{\mathbb{C}}(W)$, una base reale di W ed un'equazione cartesiana reale per W nelle coordinate (x, y, z).
(ii) Determinare equazioni parametriche delle rette vettoriali (i.e. dei $\mathbb{C}$-sottospazi vettoriali di dimensione 1) di W che sono $\langle\ ,\ \rangle_S$-isotrope.
(iii) Considerata la forma quadratica

$$\Phi(x, y, z) := 2x^2 + 3xy - 3xz + y^2 - 2yz + z^2$$

su $\mathbb{C}^3$ dedurre (senza trovare necessariamente la base diagonalizzante) la *forma canonica normale*, i.e. la forma canonica su $\mathbb{C}$, della forma quadratica Φ e stabilire se la sua restrizione $\Phi_{|W}$ al $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale W é una forma quadratica su W con radicale non-banale.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O;\mathcal{E})$ ortonormale che fornisce coordinate cartesiane (x, y, z).
(i) Verificare che l'isometria

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

é la riflessione rispetto al piano π, di equazione cartesiana $\pi : 2x - y + z = 4$.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}$, centrata nell'origine O e tangente al piano π, determinando inoltre le coordinate del punto P di tangenza tra $\mathcal{S}$ e π.
(iii) Classificare la quadrica $f(\mathcal{S})$ ottenuta per riflessione di $\mathcal{S}$ rispetto a π, stabilendo se il punto P determinato in (ii) appartiene o meno a $f(\mathcal{S})$ ed, in caso di risposta affermativa, stabilire se P é punto *semplice*, i.e. non-singolare, per $f(\mathcal{S})$ determinando inoltre l'equazione cartesiana del piano $T_P(f(\mathcal{S}))$ tangente nel punto P a $f(\mathcal{S})$.

Esercizio 3. Nel piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, con riferimento affine $RA(O;\mathcal{E})$ siano date coordinate affini (x, y) rispetto al riferimento affine considerato. Si consideri la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione caartesiana

$$\mathcal{C}: \; xy - 3x - 2y + 4 = 0.$$

(i) Classificare $\mathcal{C}$ dal punto di vista affine reale, determinando le coordinate del centro di simmetria C di $\mathcal{C}$ e le equazioni cartesiane di eventuali asintoti di $\mathcal{C}$.
(ii) Considerata l'inclusione naturale di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come carta affine $\mathbb{A}^2_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, i.e. $(x, y) \to [1, x, y]$, preso $K = [0, 1, 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, verificare che la retta proiettiva $r := \mathcal{L}(C, K)$ ha come traccia r_0 in $\mathbb{A}^2_0$ un diametro di $\mathcal{C}$ che risulta essere una retta affine secante $\mathcal{C}$ in due punti semplici $P_1 \neq P_2$ di $\mathcal{C}$. Determinare inoltre esplicitamente le coordinate dei due punti P_1 e P_2.
(iii) Determinare equazioni cartesiane delle rette tangenti a $\mathcal{C}$ nei punti P_1 e P_2 determinati in (ii) e stabilire la mutua posizione in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di queste due rette, i.e. se le due rette sono coincidenti o parallele distinte oppure incidenti (non-coincidenti).

Esercizio 1

Si consideri $\mathbb{C}^3$ spazio vettoriale complessificato di $\mathbb{R}^3$, munito di base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ come base reale ortonormale rispetto al complessificato $\langle , \rangle_S$ del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$. Siano

$$\underline{v}_1 = (2i)\,\underline{e}_1 - i\,\underline{e}_2 + (1+i)\,\underline{e}_3 \quad e \quad \underline{v}_2 = (-2i)\,\underline{e}_1 + i\,\underline{e}_2 + (i+1)\,\underline{e}_3$$

vettori in $\mathbb{C}^3$ e sia $W := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

(i) Determinare $\dim_{\mathbb{C}}(W)$ e determinare inoltre una base reale di W ed un'equazione cartesiana reale della forma $ax + by + cz = 0$, determinata rispetto alla base reale $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ di $\mathbb{C}^3$

(ii) Determinare equazioni parametriche delle eventuali rette vettoriali isotrope contenute in W

(iii) Se $\Phi(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 3xz + y^2 - 2yz + z^2$ è f.q. su $\mathbb{C}^3$ dedurre (senza nec. trovare la base diagonalizzante) la forma canonica normale di Φ su $\mathbb{C}^3$ e stabilire se $\Phi|_W$ ha radicale non banale

(i) $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ i \\ i+1 \end{pmatrix}$

$$rg(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = rg\begin{pmatrix} 2i & -2i \\ -i & i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} -i & i \\ 1+i & 1+i \end{pmatrix} = -i(1+i) - i(1+i) = -2i(1+i) \neq 0$$

$\Rightarrow \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ sono $\mathbb{C}$-linearmente indipendenti

$\Rightarrow W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è t.c. $\dim_{\mathbb{C}}(W) = 2$

Notiamo che

$$\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathbb{C}} 2i\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} := \underline{b}_1 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2$$

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(1+i) \end{pmatrix} \sim_{\mathbb{C}} 2(1+i)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} := \underline{b}_2 = \underline{e}_3$$

$\Rightarrow W$ ammette base reale e dunque equazione cartesiana reale data da

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - 2y = 0 \quad \text{cioè} \quad \boxed{x + 2y = 0}$$

(ii) Notiamo che $\underline{w} \in W$ qualsiasi vettore è della forma ⓶

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad t.c. \quad l + 2m = 0 \quad \text{cioè} \quad l = -2m$$

Perciò $\underline{W} = \begin{pmatrix} -2m \\ m \\ n \end{pmatrix}$ con $(m, n) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Affinché $\underline{w} \in W$ sia isotropo deve valere quindi:

$$(-2m)^2 + m^2 + n^2 = 0$$

cioè $$5m^2 + n^2 = 0$$

- Se $n = 0 \Rightarrow m = 0$ $\divideontimes$
- Perciò $n \neq 0$ e $t := \frac{m}{n}$ fornisce $5t^2 + 1 = 0$ cioè

$t^2 = -\frac{1}{5}$ cioè $t = \pm i \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$

$$(m, n) = (\pm i, \sqrt{5})$$

$\Rightarrow$ $\underline{W}_{\pm} = (\pm 2i, \pm i, \sqrt{5}) \in W$ sono le direzioni isotrope in W.

Le rette isotrope per O in W sono:

$$l_1 : \underline{X} = t \begin{pmatrix} 2i \\ i \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad l_2 : \underline{X} = t \begin{pmatrix} -2i \\ -i \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(iii) La forma quadratica Φ ha matrice rappresentativa in base (reale) $\mathcal{E}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 1 & -1 \\ -3/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 2 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \left[\frac{9}{4} + 2 + \frac{9}{4}\right] = 0$ ma $\det\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - \frac{9}{4} \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow$ la sua forma canonica normale è $z_1^2 + z_2^2 = 0$ in opportune coordinate

se consideriamo $\Phi|_W$ si ha che, in base $\mathcal{B} = \{ \underline{b}_1 = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_2, \underline{b}_2 = \underline{e}_3$

abbiamo che se b_Φ è forma polare di Φ $\Rightarrow$

$$b_\Phi(b_1, b_1) = \Phi(b_1) = \Phi(2e_1 - e_2) =$$

$$= b_\Phi(2e_1 - e_2, 2e_1 - e_2) = 4\Phi(e_1) - 4b_\Phi(e_1, e_2) + \Phi(e_2)$$

$$= 4(2) - \cancel{4}^{2}\left(\frac{3}{\cancel{2}}\right) + 1 = \cancel{6} - \cancel{6} + 1 = 1$$

$$b_\Phi(b_2, b_2) = \Phi(b_2) = \Phi(e_3) = 1$$

$$b_\Phi(b_1, b_2) = b_\Phi(2e_1 - e_2, e_3) =$$

$$= 2\, b_\Phi(e_1, e_3) - b_\Phi(e_2, e_3) = \cancel{2}\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right) - (-1) = -3 + 1 = -2$$

$$\Rightarrow \quad \Phi|_W = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \Phi|_W \text{ è nondegenere.}$$

$\Rightarrow$ il radicale di $\Phi|_W$ è banale.

Esercizio 2

Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ si consideri $RC(O,x,y,z)$ canonico.

(i) Verificare che l'isometria

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\underline{c}=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8/3\\-4/3\\4/3\end{pmatrix}$$

è la riflessione rispetto al piano π di equazione cartesiana

$$\pi:\ 2x-y+z=4$$

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della sfera S di centro $\underline{O}$ e che sia tangente a π, calcolando le coordinate del punto di tangenza P

(iii) Classificare la quadrica $f(S)$ ottenuta per riflessione di S rispetto a π, stabilendo se $P\in f(S)$ ed, in caso di risposta affermativa, se P è punto semplice per $f(S)$ e, in caso di risposta affermativa, determinando l'equazione del piano tangente $T_P(f(S))$ a $f(S)$ in P.

(i) Notiamo che $f(\underline{X})=\underline{M}\,\underline{X}+\underline{c}$ con $\underline{c}=\begin{pmatrix}8/3\\-4/3\\4/3\end{pmatrix}$ e $M\in O(3,\mathbb{R})\setminus SO(3,\mathbb{R})$

La giacitura di π è $\pi_0: 2x-y+z=0$ che ha un vettore normale

$$\underline{m}_{\pi_0}:=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow M\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\\1\\-1\end{pmatrix}$$

cioè $\underline{m}_{\pi_0}$ è autovettore di autovalore -1 per M

Inoltre $P=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\in\pi$ e $f(P)=M\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8/3\\-4/3\\4/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\4/3\\8/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8/3\\-4/3\\4/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ π è piano di punti fissi per f $\Rightarrow$

f è la riflessione rispetto a π

(ii) La sfera sarà della forma

$$S:\ x^2+y^2+z^2=r^2$$ perché il centro è in O

e S sarà tangente a π $\Leftrightarrow$ $d(O,\pi)=r$, dove r è il raggio di S

Perciò $$d(O,\pi)=\frac{|-4|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=r$$

Pertanto
$$r^2 = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{6}_3} = \frac{8}{3} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = \frac{8}{3}$$

Il punto di tangenza si ottiene intersecando la retta l per $O=(0,0,0)$ con vettore direttore $n_\pi = \begin{pmatrix}2\\-1\\+1\end{pmatrix}$ con S

$$l: \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad l \cap S: \ (2t)^2+(-t)^2+(t)^2 = \frac{8}{3}$$

$$4t^2+t^2+t^2 = \frac{8}{3}$$

$$\cancel{6}_3\, t^2 = \frac{\cancel{8}^{4}}{3} \Rightarrow t^2 = \frac{4}{9} \qquad t = \pm\frac{2}{3}$$

Abbiamo $P_1 = \begin{pmatrix}4/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix}-4/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

Notiamo che $2\left(\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow P_1 \in \pi$

$$2\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3} = -4 \Rightarrow P_2 \notin \pi$$

Il punto di tangenza è $P_1 = P = \begin{pmatrix}4/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$

(iii) Poiché f è isometria $\Rightarrow f(S)$ è sfera di raggio $r = \frac{4}{\sqrt{6}}$ ed è riflessa di S rispetto a $\pi \Rightarrow$ $f(S)$ è tangente a π in P che dunque è semplice per $f(S)$.

Esercizio 3 (1)

Nel piano affine reale, $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, con riferimento affine $RA(O, x, y)$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{C}: \; xy - 3x - 2y + 4 = 0$$

(i) Classificare $\mathcal{C}$ dal punto di vista affine reale e determinare coordinate di eventuale centro di simmetria (oppure vertice) ed eq. cartes. di eventuali asintoti.

(ii) Considerato $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\quad (x, y) \to [1, x, y]$ verificare che la retta proiettiva $r = \mathcal{L}(K, C)$ con $K = [0, 1, 1]$ è un diametro di $\mathcal{C}$ che è secante $\mathcal{C}$ in due punti semplici (non singolari) $P_1 \neq P_2 \in \mathcal{C}$

(iii) Calcolare equazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P_i, $i = 1, 2$.

(i) $$A = \begin{pmatrix} 4 & -3/2 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - [1] = \frac{6}{4} - 1 \neq 0$$

$$\det(A_0) = -\frac{1}{4} < 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ iperbole generale

Centro di $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} y = 0 & \Rightarrow \frac{1}{2} y = \frac{3}{2} \Rightarrow y = 3 \\ -1 + \frac{1}{2} x = 0 & \Rightarrow \frac{1}{2} x = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{C = (2, 3)}$

$$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_{1,\infty} = [0, 1, 0] \\ P_{2,\infty} = [0, 0, 1] \end{matrix} \Rightarrow \text{asintoti di } \mathcal{C} \; \boxed{\begin{matrix} y = 3 \\ \text{e} \\ x = 2 \end{matrix}}$$

(ii) $K = [0,1,1]$ e $C = [1,2,3] \Rightarrow$ (2)

la traccia di $r := \mathcal{L}(K, C)$ è un diametro di $\mathcal{C}$

che passa per C e ha come vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pertanto è la retta

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y-3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-2) - (y-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x - y + 1 = 0}$$

Le sue equazioni parametriche affini sono

$$r_0 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \end{cases}$$

Pertanto $r_0 \cap \mathcal{C}$: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ (2+t)(3+t) - 3(2+t) - 2(3+t) + 4 = 0 \end{cases}$

$$6 + \cancel{5t} + t^2 - 12 - \cancel{5t} + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 2 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ r_0 è diametro secante la conica $\mathcal{C}$ in due

punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} \\ 3-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(iii) La tangente a $\mathcal{C}$ in P_1 è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{2} & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3/2 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 - \frac{3}{2}(2+\sqrt{2}) - (3+\sqrt{2}) & \underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\underset{\shortparallel}{\cancel{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(3+\sqrt{2})}} & \underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1 + \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$d + \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = 0 \Rightarrow x + y + d' = 0$$

per passare per P_1: $d' = -5 - 2\sqrt{5}$

$T_{P_1}(\mathcal{C}) : x + y - (5 + 2\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow$ analogo $T_{P_2}(\mathcal{C})$.