Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

VII Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio cartesiano $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, si consideri la quadrica euclidea

$$\Sigma : \; 8x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - 2xz + x - z = 0.$$

(i) Classificare Σ e dedurre la sua forma canonica affine in opportune coordinate di $\mathbb{E}^3$.
(ii) Sia dato il piano α, di equazione cartesiana

$$\alpha : \; x - z = 0$$

e sia

$$\mathcal{C} := \Sigma \cap \alpha$$

la conica intersezione. Riconoscere la natura della conica $\mathcal{C}$ (i.e. se irriducibile, o riducibile oppure non-ridotta) giustificando inoltre il motivo per cui $\mathcal{C}$ possa essere contenuta in Σ.

Esercizio 2. Nello spazio cartesiano $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, sia data la quadrica euclidea Σ di equazione cartesiana

$$\Sigma : \ x^2 + 2y^2 - 9z^2 - 4 = 0.$$

(i) Verificare che Σ e' un iperboloide iperbolico.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle schiere di rette contenute in Σ.

(iii) Trovare le 2 rette delle schiere passanti per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma$.

Esercizio 3. Nello spazio cartesiano $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, si consideri la retta ℓ, passante per l'origine O e di vettore direttore $\underline{v} = (1, 1, 1)$ (scritto in coordinate per riga per comodita').
(i) Determinare equazioni cartesiane della quadrica Σ ottenuta facendo ruotare di angolo $\theta \in [0, 2\pi)$, attorno all'asse z del riferimento cartesiano, la retta ℓ.
(ii) Classificare Σ, deducendo la sua forma canonica affine in opportune coordinate (x', y', z') per $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.
(iii) Dalla classificazione ottenuta, dedurre la dimensione del luogo singolare di Σ.
(iv) Classificare le coniche sezioni ottenute intersecando Σ con piani della forma $z = k$, con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Nello spazio cartesiano $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, sia data la quadrica Σ di equazione cartesiana

$$\Sigma : \ 2x^2 - 4xz + 2z^2 - x + y - z = 0.$$

(i) Verificare che Σ e' un cilindro parabolico.
(ii) Stabilire se Σ e' una quadrica singolare.
(iii) Dedurre la forma canonica affine di Σ.
(iv) Determinare i parametri direttori delle rette generatrici di Σ (Hint: prendere un punto su Σ, determinare il piano tangente in questo punto, considerare la conica sezione e ricordare che Σ e' un cilindro).

Esercizio 5. Sia $f \in End(\mathbb{R}^4)$ l'endomorfismo la cui matrice rappresentativa nel riferimento canonico $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico di f.

(ii) Determinare il polinomio minimo di f.

(iii) Dedurre la forma canonica di Jordan di f.

Esercizio 6. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E}$. Sia dato l'endomorfismo L_A determinato dalla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che lo spettro dell'endomorfismo L_A e' contenuto in $\mathbb{R}$ e, per ogni autovalore di L_A, determinare equazioni cartesiane e basi dei rispettivi autospazi.
(ii) Dedurre il polinomio minimo di L_A e la forma canonica J di Jordan di L_A.
(iii) Stabilire se puo' esistere un isomorfismo tra lo spazio vettoriale quoziente $\frac{\mathbb{R}^3}{\mathrm{Im(L_A)}}$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dei polinomi in un'indeterminata x, a coefficienti reali e di grado al piu' uno.