Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

VI Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo standard, sia data la conica proiettiva Γ di equazione cartesiana omogenea

$$x_0^2 + x_0x_2 - x_1^2 - x_1x_2 = 0.$$

(i) Stabilire se Γ e' singolare o meno.
(ii) In caso di risposta affermativa al punto (i), determinare equazioni cartesiane e parametriche omogenee del luogo singolare di Γ, i.e. di $\mathrm{Sing}(\Gamma)$.
(iii) Dopo aver stabilito che il punto $Q = [2, -1, -1] \in \Gamma$ non e' punto singolare per Γ, determinare equazione cartesiana omogenea della retta proiettiva tangente a Γ nel punto Q.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo standard, siano date la quadriche proiettive $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ di equazioni cartesiane omogenee, rispettivamente,

$$\mathcal{Q}_1 : x_0^2 - x_1^2 + x_3^2 = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2 : x_0 x_1 - x_1 x_2 = 0.$$

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee degli eventuali luoghi singolari delle quadriche proiettive date.
(ii) Stabilire quali tra le due quadriche date è un cono di vertice un punto che proietta su un piano una conica irriducibile e quale invece e' unione di due piani proiettivi.
(iii) Dopo aver stabilito che il punto $Q = [1, 1, 1, 0]$ e' un punto non-singolare per entrambi le quadriche, determinare equazioni cartesiane omogenee dei piani tangenti proiettivi nel punto Q alle rispettive due quadriche date.

Esercizio 3. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico e relative coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, sia data la conica proiettiva C di equazione cartesiana omogenea

$$C: \ x_0^2 + x_0x_2 - x_1^2 - x_1x_2 = 0.$$

(i) Classificare dal punto di vista proiettivo la conica C, determinando la sua forma canonica proiettiva reale in opportune coordinate omogenee $[z_0, z_1, z_2]$ per $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(ii) Determinare le coordinate omogenee dei punti di intersezioni di C con la retta fondamentale $H_0 : x_0 = 0$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(iii) Studiare le intersezioni della conica C con la retta $r : x_0 - x_1 = 0$ e le intersezioni della conica C con la retta $\ell : x_0 + x_1 + x_2 = 0$, deducendo le coordinate dei punti singolari di C.

Esercizio 4. Nel piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sia assegnato il riferimento affine standard $RA(O; x, y)$. Si consideri il completamento proiettivo di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dato dall'inclusione naturale

$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

e siano $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate omogenee del piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(i) Determinare il punto improprio P della parabola $\mathcal{P} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $y = 2x^2 - 3x + 1$.
(ii) Determinare le equazioni cartesiane del fascio di rette affini r_t, $t \in \mathbb{R}$ parametro, che sono traccia in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ del fascio di rette proiettive di centro il punto P.
(iii) Determinare l'intersezione della retta r_t con la parabola $\mathcal{P}$, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, e determinare la proiezione di questa intersezione sull'asse x, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Nel piano affine complesso $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, con coordinate cartesiane (x, y), sia data γ la conica affine di equazione cartesiana

$$\gamma : \ 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 3x + 3y - 2 = 0.$$

(i) Classificare γ dal punto di vista affine, deducendo la forma canonica affine complessa di γ in opportune coordinate affini (x', y').
(ii) Considerando γ come conica con equazione cartesiana reale rispetto ad un riferimento cartesiano reale $RC(O, x, y)$ nel piano euclideo complessificato $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$, determinare le equazioni cartesiana nelle coordinate cartesiane (x, y) delle giaciture di eventuali assi di simmetria della conica γ.
(iii) Considerato il piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ come carta affine di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dove $X_0 \neq 0$, determinare equazione cartesiana omogenea della conica $\overline{\gamma}$ ottenuta come chiusura proiettiva della conica γ e classificare $\overline{\gamma}$ dal punto di vista proiettivo.

Esercizio 6. Nel piano affine reale $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, sia fissato un sistema di riferimento affine $RA(O; x, y)$. Al variare di un parametro reale $t \in \mathbb{R}$, si consideri la conica affine γ_t che, rispetto al riferimento affine scelto, ha equazione cartesiana:

$$\gamma_t : x^2 + 2txy + y^2 + t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, γ_t e' non–degenere.

(ii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, la conica γ_t e' un'iperbole e calcolarne asintoti e centro di simmetria.

(iii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ γ_t e' un'ellisse non-degenere a punti reali.

Esercizio 7. Nel piano cartesiano $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento cartesiano standard $RC(O;x,y)$, sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{C}:\ x^2 - xy + y^2 - 4x - 3 = 0.$$

(i) Classificare la conica $\mathcal{C}$.
(ii) Determinare, in opportune coordinate (x', y'), la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ trovando esplicitamente l'isometria tra il riferimento cartesiano $RC(O;x,y)$ originario ed il riferimento $RC(O';x',y')$ in cui $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica metrica.
(iii) Scrivere le equazioni cartesiane, nel riferimento originario $RC(O;x,y)$, degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica $\mathcal{C}$.
(iv) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica affine, in opportune coordinate (x'', y''), trovando esplicitamente l'affinità tra il riferimento originario $RC(O;x,y)$ ed il riferimento affine $RA(O'';x'',y'')$ in cui $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica affine.