Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

V Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ rispetto al riferimento proiettivo standard, si considerino i punti $P = [1, 0, 0, 2]$, $Q = [0, 1, -1, 1]$ e $R = [1, 1, -1, 1]$, in posizione generale in $\mathbb{P}^3$. Sia $\ell := \mathcal{L}(P, Q)$ la retta congiungente i punti P e Q e sia $\pi := \mathcal{L}(P, Q, R)$.
(i) Denotata con ℓ_0 la retta affine, traccia della retta proiettiva ℓ nella carta affine $\mathbb{A}^3_0$, dove per definizione si ha $X_0 \neq 0$, e poste

$$x := \frac{X_1}{X_0},\ y := \frac{X_2}{X_0},\ z := \frac{X_3}{X_0}$$

le rispettive coordinate affini in $\mathbb{A}^3_0$, determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta affine ℓ_0.
(ii) Denotato con π_0 il piano affine, traccia del piano proiettivo π nella carta affine $\mathbb{A}^3_0$, determinare equazioni parametriche e cartesiane di π_0.
(iii) Denotato con $(\ell_0)_\infty$ il punto improprio della retta affine ℓ_0 e con $(\pi_0)_\infty$ la retta impropria del piano affine π_0, stabilire se $(\ell_0)_\infty \in (\pi_0)_\infty$.
(iv) Fornire una motivazione geometrica della risposta data in termini delle mutue posizioni di ℓ_0 e π_0 nella carta affine $\mathbb{A}^3_0$.

Esercizio 2. Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$. Si consideri la carta affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ munita di coordinate affini (x, y) ove, come usuale

$$x := \frac{X_1}{X_0}, \ y := \frac{X_2}{X_0}.$$

Si considerino in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ la retta r che, nelle coordinate affini della carta scelta, ha equazione cartesiana

$$r : x - 2y = 3$$

e la retta s, parallela a r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ e passante per il punto $P = (1, 2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$.

(i) Denotato con $\mathcal{F}$ il fascio di rette affini in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ generato dalle rette affini r e s, determinare equazioni del fascio $\overline{\mathcal{F}}$ di rette proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ individuato dai completamenti proiettivi delle rette affini di $\mathcal{F}$.

(ii) Indicata con $\overline{r}$ la chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ della retta affine r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$, determinare equazioni cartesiane delle rette affini r_1 e r_2 che sono tracce di $\overline{r}$, rispettivamente nelle carte affini $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_1$, i.e. dove $X_1 \neq 0$, ed in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_2$, i.e. dove $X_2 \neq 0$.

(iv) Trovare i punti impropri della retta affine r_1 nella carta affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_1$.

(v) Trovare i punti impropri della retta affine r_2 nella carta affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_2$.

Esercizio 3. Nel piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sia assegnato un riferimento affine $RA(O; x, y)$. Si consideri il completamento proiettivo di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dato dall'inclusione naturale

$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

(in altri termini $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e' identificato con la carta affine $\mathbb{A}_0$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$) e siano $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si consideri la retta affine $r \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $P = (1, 1) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e di vettore direttore $\underline{v}_r = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$. Determinare:
(i) le coordinate omogenee di r_∞, i.e. del punto improprio di r,
(ii) equazioni parametriche omogenee ed equazione cartesiana omogenea della retta $\overline{r} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ chiusura proiettiva della retta affine r,
(iii) equazione cartesiana della retta affine r_1 che e' traccia della retta proiettiva $\overline{r}$ nella carta affine

$$\mathbb{A}_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_1 \neq 0\}$$

di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$,
(iv) punto improprio $(r_1)_\infty$ della retta affine r_1 nella carta affine $\mathbb{A}_1$.

Esercizio 4. Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico e coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti $A = [1, 0, 0, 1]$, $B = [-1, 1, 1, 1]$ e la retta r, congiungente A e B. Si denotino con $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ le coordinate omogenee nello spazio proiettivo duale $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ (i.e. le coordinate Plueckeriane), definite rispetto al riferimento proiettivo duale di quello canonico. Si consideri infine la mappa naturale

$$\delta : (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^* \to \{\text{Iperpiani di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}\}.$$

(i) Determinare equazioni omogenee parametriche ed equazioni omogenee cartesiane della retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.
(ii) Stabilire se la retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ é contenuta nel piano $\pi \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $\pi : x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = 0$.
(iii) Si consideri $\Lambda_1(r)$ il *sistema lineare di piani* di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di *centro (od asse)* la retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ e si consideri il sottospazio proiettivo $r^\vee := \delta^{-1}(\Lambda_1(r)) \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ ad esso associato. Determinare dimensione, equazioni omogenee parametriche ed equazioni omogenee cartesiane (nelle coordinate Pluckeriane di $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$) di $r^\vee = \delta^{-1}(\Lambda_1(r))$.
(iv) Utilizzando il *principio di dualita' proiettiva* ed i quesiti precedentemente svolti, stabilire se il sottospazio proiettivo $r^\vee = \delta^{-1}(\Lambda_1(r)) \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ passa per il punto $P = [1, 1, 1, -1] \in (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ e se $r^\vee$ é contenuto nel piano $\beta \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ di equazione cartesiana $a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$.

Esercizio 5. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, di riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si consideri la proiettivita' $\varphi \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ individuata dalla classe di proporzionalita' della matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare l'unica retta ℓ tra le tre rette fondamentali H_0, H_1 e H_2 del riferimento di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che risulta essere retta fissa (o stabile) per la proiettivita' φ. Stabilire inoltre se tale retta e' anche retta di punti fissi per φ.

(ii) Determinare tutti i punti fissi di φ e stabilire se qualcuno di essi e' situato sulla retta ℓ individuata al punto (i).

(iii) Denotato con $\mathcal{F}$ il fascio di rette proiettive di centro in punto $C = [1, -2, 0]$, determinare equazioni omogenee parametriche ed equazioni omogenee cartesiane nelle coordinate Plückeriane di $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ del sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ corrispondente a $\varphi(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 6. Si consideri il piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P} := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, munito di riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}$. Siano dati i quattro punti

$$P_0 = [1, 0, 0],\ P_1 = [-1, 1, 0],\ P_2 = [2, -1, 1],\ P_3 = [0, 0, 1].$$

(i) Stabilire se i quattro punti dati sono in posizione generale in $\mathbb{P}$ e determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane della retta proiettiva $r := \mathcal{L}(P_1, P_2) \subset \mathbb{P}$ congiungente i punti P_1 e P_2.

(ii) Sia $\mathbb{P}^*$ il piano proiettivo duale di $\mathbb{P}$, munito di riferimento duale a quello canonico per $\mathbb{P}$, che fornisce quindi coordinate omogenee Plueckeraine $[a_0, a_1, a_2]$ su $\mathbb{P}^*$ e si consideri l'applicazione di dualita'

$$\delta : \mathbb{P}^* \to \{\text{Rette di } \mathbb{P}\}.$$

Considerato $\Lambda_1(P_1)$ il fascio di rette proiettive in $\mathbb{P}$ di centro il punto P_1, determinare equazioni cartesiane nelle coordinate $[a_0, a_1, a_2]$ del sottospazio proiettivo $\delta^{-1}(\Lambda_1(P_1)) \subset \mathbb{P}^*$, verificando che il sottospazio proiettivo $\delta^{-1}(r) \subset \mathbb{P}^*$ e' contenuto in $\delta^{-1}(\Lambda_1(P_1))$.

(iii) Determinare le equazioni omogenee di tutte le proiettivita' di $\mathbb{P}$ che trasformano ordinatamente la quaterna ordinata P_0, P_1, P_2, P_3 nella quaterna fondamentale ordinata F_0, F_1, F_2, U, dove F_i punto fondamentale, $0 \leq i \leq 2$, ed U punto unità nel riferimento proiettivo canonico.

Esercizio 7. Si consideri $\mathbb{P} := \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la retta proiettiva numerica reale, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ su $\mathbb{P}$. Siano assegnati i seguenti tre punti:

$$A = [2, 3],\ B = [2, 1],\ C = [1, -1],$$

espressi nelle coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ nel riferimento canonico.
(i) Stabilire se i tre punti A, B, C determinano un nuovo riferimento proiettivo per $\mathbb{P}$.
(ii) Determinare le equazioni omogenee

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha\, M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

del cambiamento di coordinate omogenee da $[x_0, x_1]$ a $[y_0, y_1]$ rispetto al riferimento proiettivo di $\mathbb{P}$ che ha A come primo punto fondamentale del riferimento, B come secondo punto fondamentale del riferimento e C come punto unità del riferimento (i.e. il riferimento con coordinate $[y_0, y_1]$ in cui A, B e C hanno coordinate omogenee $[1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 1]$ rispettivamente).
(iii) Si interpretino le equazioni omogenee trovate in (ii) come equazioni della proiettivita' $f \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}) = PGL(3, \mathbb{R})$ tale che

$$f(A) = F_0 = [1, 0],\ f(B) = F_1 = [0, 1],\ f(C) = U = [1, 1].$$