Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

IV Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia fissata la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ e si consideri il sottospazio $W = Span\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$, ove

$$\underline{w}_1 := 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 4\underline{e}_3 + \underline{e}_4, \;\; \underline{w}_2 := \underline{e}_1 + \underline{e}_4.$$

(i) Determinare $\dim(V/W)$
(ii) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V/W
(iii) Scrivere le coordinate del vettore (classe)

$$[\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4] = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4 + W \in V/W$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V/W determinata al punto (ii).
(iv) Determinare per $(V/W)^*$ la base $\mathcal{B}^*$ duale della base $\mathcal{B}$ di V/W determinata al punto (ii).
(v) Determinare una base per $Ann_{\mathbb{R}^4}(W)$.

Esercizio 2. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Sia $W := \mathrm{Ker}(f)$.
(i) Determinare $\dim(W)$ e $\dim\big(\mathbb{R}^4/W\big)$.
(ii) Verificare che f e' un'applicazione lineare suriettiva.
(iii) Se prendiamo in $\mathbb{R}^4$ i vettori

$$\underline{u}_1 := -\underline{e}_1 + \underline{e}_4, \;\; \underline{u}_2 := \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3,$$

sia

$$U := Span\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Verificare che U e W sono in somma diretta in $\mathbb{R}^4$.
(iv) Dedurre un isomorfismo esplicito tra U e $\mathbb{R}^4/W$; stabilire se in $\mathbb{R}^4/W$ si puo' avere l'eguaglianza tra vettori (classi) $[\underline{u}_1] = [\underline{u}_2]$.
(v) Denotato con $\overline{\mathcal{E}} := \{[\underline{e}_3], [\underline{e}_4]\}$ il sistema di vettori (classi) in $\mathbb{R}^4/W$, stabilire se il sistema $\overline{\mathcal{E}}$ costituisce una base per $\mathbb{R}^4/W$.
(vi) Sia $\overline{f} : \mathbb{R}^4/W \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$\overline{f}([\underline{v}]) = f(\underline{v}).$$

Verificare che $\overline{f}$ e' un'applicazione lineare e dedurre che e' un isomorfismo di spazi vettoriali (ricordare I Teorema di Omomorfismo di Spazi Vettoriali)
(vii) Se $\mathcal{F}$ denota la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, determinare la matrice $M_{\mathcal{F},\,\overline{\mathcal{E}}}(\overline{f})$ rappresentativa dell'applicazione lineare

$$\overline{f} : \mathbb{R}^4/W \to \mathbb{R}^2$$

nelle basi $\overline{\mathcal{E}}$ per $\mathbb{R}^4/W$ e $\mathcal{F}$ per $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^2$, dotato di riferimento proiettivo standard e coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ rispetto a tale riferimento, siano dati i punti quattro punti

$$Q_0 = [1, 2 - 1],\ Q_1 = [0, 1, 1],\ Q_2 = [2, 1, -5],\ Q_3 = [1, -2, -5].$$

(i) Stabilire se i quattro punti dati sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2$.
(ii) Stabilire la dimensione del sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
(iii) In caso avvenga $\dim L(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \leq 1$, determinare equazioni parametriche omogenee del sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
(iv) Determinare equazioni omogenee del fascio di rette proiettive di centro il punto Q_0

Esercizio 4. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ rispetto al riferimento proiettivo standard, si considerino i punti $P = [1, 0, 0, 2]$, $Q = [0, 1, -1, 1]$ e $R = [1, 1, -1, 1]$.

(i) Verificare che i punti P, Q e R sono in posizione generale in $\mathbb{P}^3$.
(ii) Determinare la dimensione della stella di rette in $\mathbb{P}^3$ di centro il punto P.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee in $\mathbb{P}^3$ della retta proiettiva $\ell := \mathcal{L}(P, Q)$, i.e. la retta congiungente i punti P e Q.
(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di una retta proiettiva r di $\mathbb{P}^3$ tale che $\mathcal{L}(\ell, r) = \mathbb{P}^3$.
(v) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano proiettivo $\pi := \mathcal{L}(P, Q, R)$, generato dai tre punti non allineati dati.

Esercizio 5. Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ reale, con riferimento proiettivo standard che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si consideri il punto $Q = [1, 1, 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(i) Determinare le formule della mappa

$$\pi_{Q,H_0} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{Q\} \twoheadrightarrow H_0$$

di proiezione dal punto Q sulla retta fondamentale $H_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_0 = 0\}$, i.e.

$$\pi_{Q,H_0}([p_0, p_1, p_2]) = ?.$$

(ii) Determinare equazioni omogenee e coordinate omogenee dell'immagine, mediante l'applicazione π_{Q,H_0}, di ciascuna retta proiettiva appartenente al fascio di rette di centro Q.
(iii) Determinare equazioni omogenee dell'immagine, mediante l'applicazione π_{Q,H_0}, di una qualsiasi retta proiettiva non passante per Q.