Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

III Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$ lo spazio vettoriale complesso, ottenuto come complessificazione di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base reale di V individuata dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$, munito di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = i\underline{e}_1,\ \underline{v}_2 = i\underline{e}_1 + i\underline{e}_2, \underline{v}_3 = i\underline{e}_3.$$

(i) Verificare che i vettori dati formano una $\mathbb{C}$-base $\mathcal{V}$ per V.
(ii) Dato il vettore

$$\underline{w} := 2\underline{e}_1 + i\underline{e}_2 + (2-i)\underline{e}_3,$$

determinare le coordinate di $\underline{w}$ in base $\mathcal{V}$.
(iii) Considerati i vettori

$$\underline{u} := (2+i)\underline{e}_1 + (4-5i)\underline{e}_3,\ \underline{k} := (1+i)\underline{e}_1 + (2+i)\underline{e}_2,$$

decomporli nelle loro componenti reali ed immaginarie, nella decomposizione reale di

$$V = Re(V) \oplus Im(V).$$

(iv) Considerato $\langle\ ,\rangle_S$ l'estensione a V del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$, calcolare $\langle \underline{u}, \underline{k} \rangle_S$.

Esercizio 2. Si consideri $V = \mathbb{C}^2$ lo spazio vettoriale complesso, ottenuto come complessificazione di $\mathbb{R}^2$. Sia $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ la base reale di V, individuata dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ piano vettoriale euclideo considerato munito di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$.
(i) Considerati i vettori

$$\underline{u} := (2+i)\underline{e}_1 + (1-3i)\underline{e}_2,\ \underline{k} := (3-i)\underline{e}_1 + (-2-4i)\underline{e}_2,$$

stabilire se sono vettori $\mathbb{C}$-linearmente indipendenti.
(ii) Considerato $\langle\ ,\ \rangle_S$ l'estensione a V del prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$, stabilire se il vettore

$$\underline{u} := (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2})\underline{e}_1 + (\frac{\sqrt{1}}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2})\underline{e}_2$$

e' $\langle\ ,\ \rangle_S$ –isotropo

Esercizio 3. Nel piano euclideo complessificato $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ ortonormale reale.
(i) Determinare la distanza del punto $Q = (2i, 1 - i)$ da $A = (i, 2 - i)$.
(ii) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane delle rette isotrope passanti per il punto A.
(iii) Stabilire se ciascuna delle rette isotrope, determinate al punto (ii), contengono un solo punto reale e se questi punti reali sono tutti distinti fra loro.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito di prodotto scalare standard e di base canonica $\mathcal{E}$, si consideri l'endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se f definisce un operatore autoaggiunto (equiv. simmetrico).
(ii) In caso di risposta affermativa, utilizzando il Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, determinare una base ortonormale di autovettori di f.
(iii) Determinare la forma diagonale di f ed una matrice invertibile C che, per congruenza, fornisca la forma diagonale di f a partire dalla matrice rappresentativa di f in base $\mathcal{E}$.