**Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"**
**Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024**
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

**II Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)**

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

**COGNOME NOME:** ..............................

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito di base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$, di coordinate $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ indotte da $\mathcal{E}$ e di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, si considerino i sottospazio vettoriali

$$U = \mathrm{Span}\{\underline{u} = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2\}$$

e

$$W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_3 = 0\}.$$

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di $U$.
(ii) Determinare una base ortonormale di $U$ ed estenderla ad una base ortonormale e positivamente orientata per $\mathbb{R}^3$.
(iii) Determinare una base ortonormale di $U^\perp$.
(iv) Fornire equazioni parametriche e cartesiane di $U^\perp$.
(v) Determinare equazioni parametriche di $W$.
(vi) Determinare una base ortonormale di $W$ ed estenderla ad una base ortonormale e positivamente orientata per $\mathbb{R}^3$.
(vii) Determinare una base ortonormale di $W^\perp$.
(viii) Fornire equazioni parametriche e cartesiane di $W^\perp$.
(ix) Preso il vettore $\underline{u}$, determinare il vettore proiezione ortogonale di $\underline{u}$ su $W$ ed il vettore il vettore proiezione ortogonale di $\underline{u}$ su $W^\perp$.

**Esercizio 2.** Nel piano vettoriale $\mathbb{R}^2$, munito di base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, sia

$$\underline{u} = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$$

e sia $U := \langle \underline{u} \rangle$. Sia $\tau_U \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorfismo dato dalla riflessione rispetto ad $U$.
(i) Dedurre il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $\tau_U$ e la sua forma diagonale.
(ii) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}(\tau_U)$ che rappresenta l'endomorfismo $\tau_U$ nella base canonica $\mathcal{E}$.
(iii) Stabilire se $M_{\mathcal{E}}(\tau_U)$ definisce un nuovo prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.
(iv) In caso di risposta negativa al punto (iii), classificare la forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ definita da $M_{\mathcal{E}}(\tau_U)$ e scrivere esplicitamente la sua segnatura, la sua forma canonica di Sylvester e determinare una base di Sylvester.

**Esercizio 3.** Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica $\mathcal{E}$ e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, sia $U$ il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Sia $\Pi_U$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio vettoriale $U$.
(i) Stabilire il rango di $\Pi_U$.
(ii) Stabilire se $\Pi_U$ e' un operatore diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trovare la sua forma diagonale in un'opportuna base.
(iii) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}(\Pi_U)$, cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore $\Pi_U$ in base canonica $\mathcal{E}$.

**Esercizio 4.** Nel piano cartesiano $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y)$, sia data la retta

$$\ell: \ x + 2y + 3 = 0.$$

(i) Determinare le formule di riflessione rispetto alla retta $\ell$.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta per riflessione rispetto alla retta $r$ della circonferenza $\mathcal{D}$ di centro il punto $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $r = 2$.

(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta $s$ passante per $C$ e perpendicolare alla retta $\ell$.

(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta $t$ passante per $C$ e parallela alla retta $\ell$.

(v) Determinare la distanza tra le rette $\ell$ e $t$.

**Esercizio 5.** Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, dotato di riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y, z)$. Siano dati i tre punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati.
(ii) Scrivere le equazioni cartesiane dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i 3 punti $A$, $B$ e $C$.
(iii) Dati ora il piano

$$\pi : \quad x + 2y = 0$$

e la retta

$$\ell : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

trovare le equazioni cartesiane della retta $r$ ottenuta per proiezione ortogonale della retta $\ell$ sul piano $\pi$.
(iv) Scrivere le formule di rotazione $R_{\frac{\pi}{2},\ell}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta orientata $\ell$.
(v) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2},\ell}(r)$, ottenuta cioe' per rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ della retta $r$ attorno alla retta orientata $\ell$.