Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2023/2024
Corso: Geometria 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. S. Trapani

I Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Se si vuole consegnare lo svolgimento, svolgere quanti piu' possibili quesiti proposti e scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: . . . .

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E}$ e della forma bilineare simmetrica

$$b(\underline{x}, \underline{y}) := 2x_1y_2 - x_1y_3 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_2.$$

(i) Stabilire se il vettore $\underline{v} := -\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ e' b-isotropo.

(ii) Stabilire se esiste una decomposizione del vettore $\underline{e}_2$ come

$$\underline{e}_2 = \underline{y}' + \underline{y}'',$$

dove $\underline{y}'$ e' un vettore proporzionale a $\underline{v}$ mentre $\underline{y}''$ e' un vettore b-ortogonale a $\underline{v}$.

(iii) Determinare l'equazione cartesiana del sottospazio b-ortogonale al vettore $\underline{e}_2$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, con $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 3$, e sia $b \in Sym(V)$ una forma bilineare simmetrica. Sia data una base $\mathcal{E}$ e si assuma che in tale base la forma b abbia matrice rappresentativa:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la forma quadratica associata a b.
(ii) Stabilire se il vettore $\underline{v} = (1, 1, 1)$, le cui coordinate sono espresse rispetto al riferimento dato $\mathcal{E}$, è b-isotropo
(iii) Determinare il radicale di b.
(iv) Determinare la forma normale di b, indicando esplicitamente la matrice cambiamento di base dalla base $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{F}$ che riduce b a forma normale.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, con coordinate (x_1, x_2, x_3), si consideri la forma quadratica

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(i) Scrivere la matrice A della forma quadratica Q in base$\mathcal{E}$
(ii) Determinare l'espressione, in base $\mathcal{E}$, della forma bilineare simmetrica polare b_Q associata a Q.
(iii) Scrivere l'espressione della forma quadratica Q nella base

$$\mathcal{F} = \{\underline{f}_1 := \underline{e}_1 + \underline{e}_3, \underline{f}_2 := \underline{e}_1, \underline{f}_3 := \underline{e}_2\},$$

con coordinate (y_1, y_2, y_3) in questa base.
(iv) Calcolare il rango di Q, la segnatura di Q e la forma canonica di Sylvester di Q, determinando esplicitamente una base di Sylvester $\mathcal{S}$ rispetto a cui Q si scrive in forma canonica di Sylvester.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale euclideo, munito della base canonica $\mathcal{E}$ e del prodotto scalare standard $\langle\, ,\, \rangle$, i.e. che ha matrice simmetrica associata in base $\mathcal{E}$ la matrice identita' I_4. Siano (x_1, x_2, x_3, x_4) le coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$ e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortonormale di U.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana del complemento ortogonale $U^{\perp}$ di U.
(iii) Determinare una base ortonormale di $U^{\perp}$.
(iv) Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\underline{v} := \underline{e}_3 - \underline{e}_4$ sia sul sottospazio U che sul sottospazio $U^{\perp}$.