

13

Quadriche dello spazio cartesiano \mathbb{R}^3

In questo capitolo studieremo le *quadriche* dello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 . Analogamente alle coniche, una quadrica si può considerare come un “oggetto” geometrico rappresentato da un polinomio $P(X_1, X_2, X_3)$ di secondo grado ed a coefficienti reali. In altri termini, a parte casi particolari (e.g. quadriche a punti non reali, quadriche puntiformi ecc. esattamente come nel caso delle coniche), questi polinomi determinano *superfici*, i.e. luoghi geometrici bidimensionali, in \mathbb{R}^3 . Il discorso è quindi analogo a quanto fatto nel Capitolo 8, dove si sono studiati i piani di \mathbb{R}^3 come superfici rappresentate da equazioni cartesiane lineari.

Esempi di quadriche sono già stati dati implicitamente nei precedenti capitoli di questo libro: le sfere (Definizione 8.21) ed i cilindri circolari (Osservazione 8.14). Dall’analisi di questi semplici esempi risulta abbastanza chiaro che, a parte i possibili casi “patologici” sopra menzionati, il fatto che una quadrica Σ sia rappresentata da un polinomio di secondo grado ha il seguente risvolto geometrico: l’intersezione con un piano π sufficientemente generale e non esterno a Σ è una conica su π e l’intersezione di Σ con due piani π e τ sufficientemente generali (in particolare, non paralleli né coincidenti) e non esterni a Σ è costituito da due punti di Σ : questi sono i punti di intersezione tra Σ e la retta $r := \pi \cap \tau$.

Data la profonda analogia con il caso delle coniche, tratteremo in modo abbastanza sintetico tutti quegli aspetti e quei risultati che sono una pura e semplice estensione a tre indeterminate di risultati considerati nel Capitolo 12. Al contrario, porremo l’accento su tutti quei risultati che non sono invece facilmente deducibili da quanto trattato per le coniche.

Dopo alcune definizioni di base, considereremo nel paragrafo 13.2 le equazioni cartesiane più “semplici” che definiscono tutti i possibili tipi di quadriche Σ dal punto di vista della geometria euclidea (Corollario 8.8, dove abbiamo il risultato analogo per i piani di \mathbb{R}^3). Analogamente al caso delle coniche, tali equazioni saranno dette *forme canoniche metriche* od *euclidee* delle quadriche di \mathbb{R}^3 . Nel paragrafo 13.4 affronteremo il problema analogo considerando però il punto di vista della geometria affine. Le equazioni che otterremo verranno dette *forme canoniche affini* delle quadriche di \mathbb{R}^3 . Studieremo alcune fondamentali proprietà geometriche delle quadriche definite da queste forme canoniche metriche ed affini ed alcune fondamentali conseguenze (Corollari 13.2 e 13.4).

Nei paragrafi 13.3 e 13.5, descriveremo l’algoritmo di *riduzione a forma canonica metrica* (rispettivamente, *affine*) grazie al quale l’equazione di partenza, $P(X_1, X_2, X_3) = 0$, di una quadrica Σ diventa via via sempre più semplice fino a ricondursi ad una,

ed una sola, delle forme canoniche metriche (rispettivamente, affini). Tale procedimento, tra le varie cose, permette di dare la *classificazione metrica* (equivalentemente, *affine*) di Σ , i.e. si potrà stabilire che tipo di quadrica è sia dal punto di vista metrico che da quello affine.

D'ora in poi in questo capitolo, considereremo lo spazio \mathbb{R}^3 in cui assumeremo, una volta per tutte, fissato un riferimento cartesiano (O, e) , con notazioni ed assunzioni come all'inizio del paragrafo 8.2.

13.1 Prime definizioni

Cominciamo con osservare brevemente alcune proprietà fondamentali dei polinomi a tre indeterminate analoghe a quelle osservate nel paragrafo 12.1 per le coniche. Sia $P(X_1, X_2, X_3)$ un polinomio a coefficienti reali nelle indeterminate X_1, X_2 e X_3 ; quindi $P(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} X_1^i X_2^j X_3^k$ è una somma finita dei monomi $\alpha_{ijk} X_1^i X_2^j X_3^k$, con i, j e k interi non negativi e $\alpha_{ijk} \in \mathbb{R}$. Il *termine noto* di $P(X_1, X_2, X_3)$ è α_{000} mentre i *monomi lineari* di $P(X_1, X_2, X_3)$ sono $\alpha_{100} X_1$, $\alpha_{010} X_2$ e $\alpha_{001} X_3$, e così via. Analogamente al caso dei polinomi in due indeterminate, il *grado* del monomio $\alpha_{ijk} X_1^i X_2^j X_3^k$, con $\alpha_{ijk} \neq 0$, è $i + j + k$ ed il *grado* di un polinomio $P(X_1, X_2, X_3)$, denotato come al solito con $\deg(P(X_1, X_2, X_3))$, è il massimo dei gradi dei monomi che compaiono nell'espressione di $P(X_1, X_2, X_3)$, i.e. tali che $\alpha_{ijk} \neq 0$.

La relazione di *proporzionalità* tra due polinomi e le nozioni di *classe di proporzionalità* definita da un polinomio $P(X_1, X_2, X_3)$ e di *rappresentante* di una classe sono identiche a quelle viste nel caso di due indeterminate. Rimandiamo pertanto il lettore al paragrafo 12.1.

Quadrica di \mathbb{R}^3

DEFINIZIONE 13.1 Una quadrica di \mathbb{R}^3 è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti, di secondo grado, a coefficienti reali e nelle indeterminate X_1, X_2 e X_3 . Se $P(X_1, X_2, X_3)$ è un rappresentante della quadrica, l'equazione quadratica

$$[13.1] \quad P(X_1, X_2, X_3) = 0$$

si dice equazione cartesiana della quadrica (o che definisce la quadrica). Il luogo geometrico $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di punti dello spazio le cui coordinate soddisfano la [13.1] è detto il supporto della quadrica.

Dalla precedente definizione, notiamo subito che le quadriche sono particolari esempi di *superfici algebriche* dello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , i.e. definite dall'annullarsi di un polinomio in tre indeterminate (per maggiori dettagli e generalità, cf. e.g. [9,

par. 7-IV], [11, parr. 31.4 e 32.3.3]. Per lo studio dettagliato di quadriche per mezzo di equazioni parametriche, cf. e.g. [3, par. 9] e [12, par. 35.9.8]). Precisamente, una quadrica è una *superficie algebrica di grado due*, dato che una sua equazione cartesiana è sempre un polinomio di secondo grado.

Ogni polinomio $P(X_1, X_2, X_3)$ di secondo grado, a coefficienti reali si può scrivere come

Equazione cartesiana di una quadrica

$$[13.2] \quad P(X_1, X_2, X_3) := a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 + 2b_1X_1 + 2b_2X_2 + 2b_3X_3 + c$$

con $a_{ij}, b_h, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq i < j \leq 3$, $1 \leq h \leq 3$, tali che almeno un $a_{ij} \neq 0$.

DEFINIZIONE 13.2 Data una quadrica di \mathbb{R}^3 definita da $P(X_1, X_2, X_3)$ come nella [13.2], le tre componenti omogenee di $P(X_1, X_2, X_3)$, di gradi rispettivamente due, uno e zero, sono:

- (i) $Q(X_1, X_2, X_3) := a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3$, che è detta forma quadratica della quadrica; la matrice simmetrica associata alla forma quadratica verrà denotata con $A := A_Q$ (Definizione 11.5);
- (ii) $\mathcal{L}(X_1, X_2) := 2b_1X_1 + 2b_2X_2 + 2b_3X_3$, che è detta forma lineare della quadrica;
- (iii) c , che è detto termine noto della quadrica.

Data Σ una quadrica, possiamo allora associare alla sua equazione cartesiana $P(X_1, X_2, X_3) = 0$ la matrice simmetrica:

$$[13.3] \quad \tilde{A} := \begin{pmatrix} c & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrice completa di una quadrica

che chiameremo la *matrice simmetrica completa* dell'equazione di Σ . In tal modo, l'equazione cartesiana di Σ si può scrivere in forma più compatta:

$$[13.4] \quad P(X_1, X_2, X_3) = (1 \ X_1 \ X_2 \ X_3) \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$$

Osservazione 13.1

Ricordando la Definizione 13.2, la sottomatrice 3×3 di \tilde{A} data da $\tilde{A}(2, 3, 4; 2, 3, 4)$ coincide con la matrice A della forma quadratica della conica. In particolare, dalla [11.6], anche l'equazione della forma quadratica $Q(X_1, X_2, X_3)$ si può

scrivere in forma compatta

$$[13.5] \quad Q(X_1, X_2, X_3) = (X_1 X_2 X_3) A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$$

Osservazione 13.2

Come nell'Osservazione 12.2, se $P(X_1, X_2, X_3)$ determina un'equazione cartesiana di una quadrica il cui supporto è $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, ogni altro polinomio nella classe di proporzionalità $[P(X_1, X_2, X_3)]$ determina un'altra equazione cartesiana della stessa quadrica e definirà lo stesso supporto. Quindi anche in questo caso, per brevità, si denoterà spesso la quadrica di equazione cartesiana $P(X_1, X_2, X_3) = 0$ e con supporto Σ semplicemente con la lettera Σ , quando risulterà chiaro che un'equazione cartesiana della quadrica è stata già assegnata.

Ovviamente, per quanto riguarda l'eventuale possibilità di confondere una classe di proporzionalità di polinomi con il supporto che essi definiscono, ci sono sempre le dovute precauzioni da prendere. Basti pensare per esempio alle quadriche $X_1^2 = 0$ e $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$ che sono l'analogo delle coniche descritte nell'Esempio 12.2. La prima

quadrica, ha come supporto il piano di equazione cartesiana $X_1 = 0$, pertanto possiamo vedere questa quadrica come un piano contato due volte (o *piano doppio*). Passiamo alla seconda quadrica:

- per ogni $c \in \mathbb{R}^+$, la quadrica ha sempre supporto vuoto; inoltre, sebbene con medesimo supporto, due diversi valori positivi di c definiscono due quadriche distinte perché i polinomi non sono proporzionali. In particolare, ogni quadrica di questo tipo ha un contenuto puramente algebrico, in quanto il suo supporto è sempre vuoto;
- se invece $c \in \mathbb{R}^-$ allora, dalla [8.69], la quadrica è una sfera di centro O e raggio $r = \sqrt{-c}$;
- da ultimo, se $c = 0$, l'unica soluzione possibile è l'origine O , pertanto la quadrica si dice anche *quadrica puntiforme*.

Alcuni dei fenomeni che si presentano nei precedenti esempi dipendono dal fatto che consideriamo *quadriche reali*, cioè polinomi a coefficienti reali, e vogliamo le soluzioni reali delle equazioni corrispondenti in \mathbb{R}^3 .

Quadriche congruenti ed affinemente equivalenti

Visto che, da quanto osservato nei precedenti esempi, le quadriche come le coniche non si riducono esclusivamente al loro supporto, anche per esse dovremo brevemente richiamare le nozioni di congruenza ed equivalenza affine definite in relazione ai polinomi che le rappresentano. Ci rifaremo sostanzialmente al paragrafo 12.2.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una qualsiasi isometria (rispettivamente, affinità) dello spazio cartesiano, cui è associato il cambiamento di coordinate

$$[13.6] \quad \begin{aligned} x_1 &= m_{11}y_1 + m_{12}y_2 + m_{13}y_3 + d_1 \\ x_2 &= m_{21}y_1 + m_{22}y_2 + m_{23}y_3 + d_2 \\ x_3 &= m_{31}y_1 + m_{32}y_2 + m_{33}y_3 + d_3 \end{aligned}$$

dove y_1, y_2 e y_3 sono le nuove coordinate di \mathbb{R}^3 date da F . Se denotiamo con

$$[13.7] \quad M := \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice dei coefficienti della trasformazione F e con \vec{d} il vettore colonna dei termini noti, allora in forma matriciale [13.6] è:

$$[13.8] \quad \vec{x} = M\vec{y} + \vec{d}$$

Sia Σ una quadrica di equazione cartesiana [13.1]. Allora, le nozioni di sostituzione ortogonale (rispettivamente, affine) di indeterminate e di polinomi isometrici (rispettivamente, affinementemente equivalenti) sono perfettamente simili a quelle introdotte per le coniche; pertanto, rimandiamo il lettore alle Definizioni 12.3 e 12.4.

Osservazione 13.3

Ovviamente, anche in questo caso se abbiamo che, due polinomi sono proporzionali per un qualche $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora essi sono sempre congruenti (Osservazione 12.4). In particolare, i polinomi saranno anche affinementemente equivalenti.

Come fatto per la matrice \tilde{A} dell'equazione di una quadrica, data un'isometria (equivalentemente, un'affinità) F come nella [13.6], definiamo la *matrice completa* di F come

$$[13.9] \quad \tilde{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ d_2 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ d_3 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

**Matrice completa
di una trasformazione**

Notiamo che $\tilde{M}(2, 3, 4; 2, 3, 4) = M$, che è la matrice della parte lineare di F , e che $\det \tilde{M} = \det M \neq 0$.

Data allora una quadrica Σ di equazione cartesiana come nella [13.4] ed un'isometria (rispettivamente, un'affinità) F come nella [13.6], la trasformata di Σ tramite F , denotata con Σ^F , è la quadrica di equazione cartesiana

$$[13.10] \quad \Sigma^F : (1 \ Y_1 \ Y_2 \ Y_3)^t \tilde{M} \tilde{A} \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Contestualmente, dall'equazione matriciale [13.5] della forma quadratica e dalla forma della matrice \tilde{M} , avremo che la forma quadratica Q^F dell'equazione di Σ^F sarà

data da:

$$[13.11] \quad Q^F : (Y_1 Y_2 Y_3)^t M A M \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = 0$$

dove M è come nella [13.7] e dove $A = \tilde{A}(2, 3, 4; 2, 3, 4)$ è la matrice simmetrica associata alla forma quadratica Q dell'equazione data di Σ .

Quadriche congruenti ed affinementemente equivalenti

DEFINIZIONE 13.3 Sia Σ una quadrica di \mathbb{R}^3 . Una quadrica Γ si dice congruente o isometrica (rispettivamente, affinementemente equivalente) a Σ se esiste un'isometria (rispettivamente, un'affinità) F di \mathbb{R}^3 tale che $\Sigma = \Gamma^F$.

Osservazione 13.4

Esattamente come nell'Osservazione 12.7, i supporti di (rispettivamente, equivalenti) sono essi stessi congruenti (rispettivamente, due quadriche congruenti (rispettivamente, affinementemente equivalenti)).

Notiamo che se Σ ha equazione matriciale come nella [13.4] e se Γ è definita analogamente da $(1 Y_1 Y_2, Y_3) \tilde{B} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = 0$, dalla [13.10] e da quanto detto fino ad ora,


Γ è congruente (rispettivamente, affinementemente equivalente) a Σ se, e solo se, esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$[13.12] \quad \lambda \tilde{B} = {}^t \tilde{M} \tilde{A} \tilde{M}$$

Le proprietà che una quadrica Σ ha in comune con tutte le quadriche ad essa congruenti (rispettivamente, affinementemente equivalenti) vengono dette *proprietà metriche* od *euclidee* (rispettivamente, *proprietà affini*) di Σ . Introduciamo alcune di queste proprietà.

Rango di una quadrica

La stessa dimostrazione fatta nel caso delle coniche ([12.14] e seguente) permette di dare la seguente:

 Interpretazione geometrica del rango di una quadrica

DEFINIZIONE 13.4 Data Σ una quadrica con matrice simmetrica completa \tilde{A} come nella [13.3], allora il rango di \tilde{A} è una proprietà metrica (rispettivamente, affine) di Σ . Tale rango viene denominato il rango di Σ e denotato con $r(\Sigma)$. La quadrica Σ si dice:

- (i) generale (o non degenere), se $r(\Sigma) = 4$;
- (ii) semplicemente degenere, se $r(\Sigma) = 3$;
- (iii) doppiamente degenere, se $r(\Sigma) = 2$;
- (iii) triplamente degenere, se $r(\Sigma) = 1$.

Osservazione 13.5

Come discusso nell'Osservazione 12.6, gli autovalori di \tilde{A} e quelli di \tilde{B} come nella [13.12] in generale non sono uguali.

Come nel caso delle coniche, esistono altre fondamentali proprietà metriche (equivalentemente, affini) di una quadrica.

Ulteriori proprietà metriche ed affini

Per esempio nel caso di quadrica generale, se consideriamo \tilde{A} e \tilde{B} come nella [13.12], il segno del determinate di \tilde{A} coincide con il segno di quello di \tilde{B} (dal Teorema di Binet $\det \tilde{B} = (\det \tilde{M})^2 (\det \tilde{A})$). D'altra parte, se moltiplichiamo l'equazione cartesiana di Σ per un qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la matrice corrispondente sarà $\lambda \tilde{A}$; perciò il determinate di questa matrice si ottiene moltiplicando per λ^4 il determinante di \tilde{A} . Abbiamo quindi:

DEFINIZIONE 13.5 Data una quadrica Σ generale con matrice simmetrica completa \tilde{A} , il segno del determinate di \tilde{A} è una proprietà metrica (rispettivamente, affine) di Σ .

Nel caso delle coniche, il segno del determinate della matrice simmetrica completa non era una proprietà metrica (equivalentemente, affine); ricordiamo che lo era invece il segno del determinate della matrice A della forma quadratica associata alla conica (Definizione 12.8).

Abbiamo un'altra importante proprietà metrica (equivalentemente, affine). Consideriamo le matrici \tilde{A} e \tilde{M} come nella [13.12]. Siano $\tilde{A}(2, 3, 4; 2, 3, 4) = A$ e $\tilde{M}(2, 3, 4; 2, 3, 4) = M$, i.e. rispettivamente la matrice della forma quadratica Q e la matrice dei coefficienti dell'isometria (equivalentemente, affinità) F come nella [13.6]. Se \tilde{B} è come nella [13.12] allora, posto $B = \tilde{B}(2, 3, 4; 2, 3, 4)$, vale la relazione analoga:

$$[13.13] \quad \lambda B = {}^t M A M$$

e B è la matrice della forma quadratica associata all'equazione della quadrica Γ . Abbiamo:

DEFINIZIONE 13.6 Sia Σ una quadrica di equazione come nella [13.4] e sia A la matrice simmetrica della forma quadratica Q di Σ , come nella Definizione 13.2. Allora il rango di A è una proprietà metrica (rispettivamente, affine) di Σ .

Paraboloidi, ellissoidi, iperboloidi, coni e cilindri

- (i) Se la quadrica Σ è generale, i.e. $r(\Sigma) = 4$, allora Σ si dice:
- (i.1) paraboloidi, se $r(A) = 2$;

- (i.2) quadrica a centro, se $r(A) = 3$. In tale eventualità, $Q(X_1, X_2, X_3)$ è pertanto una forma quadratica non degenera e Σ si dice:
 - a) ellissoide, se l'equazione quadratica omogenea $Q(X_1, X_2, X_3) = 0$ non ammette altre soluzioni reali al di fuori della soluzione nulla;
 - b) iperboloide, se l'equazione quadratica omogenea $Q(X_1, X_2, X_3) = 0$ ammette soluzioni reali non nulle;
- (ii) se la quadrica Σ è semplicemente degenera, i.e. $r(\Sigma) = 3$, si dice:
 - (ii.1) cono, se $r(A) = 3$;
 - (ii.2) cilindro, se $r(A) < 3$.

Esattamente come nel caso delle coniche, le precedenti nozioni hanno profondi risvolti geometrici; per dimostrarlo sono necessari però preliminari di geometria proiettiva, che esulano dagli obiettivi di questo testo.

Da quanto discusso fino ad ora, è chiaro che *classificare* le quadriche di \mathbb{R}^3 sarà una procedura molto più impegnativa e più ricca di casi da discutere, rispetto a quanto fatto per le coniche.

Esattamente come nel caso delle coniche (fine del paragrafo 12.3), considereremo la *classificazione metrica* delle quadriche di \mathbb{R}^3 , determinando le loro *forme canoniche metriche*, e la *classificazione affine* delle quadriche di \mathbb{R}^3 , con il calcolo esplicito di tutte le loro *forme canoniche affini*. Definiamo infatti:

DEFINIZIONE 13.7 Un insieme di forme canoniche metriche (rispettivamente, affini) delle quadriche di \mathbb{R}^3 è un insieme di rappresentanti per le distinte classi di equivalenza metrica di quadriche di \mathbb{R}^3 . Pertanto, queste forme canoniche metriche (rispettivamente, affini) sono un insieme di quadriche di \mathbb{R}^3 tali che:

- (i) le quadriche di questo insieme sono a due a due non congruenti (rispettivamente, non affinementemente equivalenti);
- (ii) ogni quadrica di \mathbb{R}^3 è congruente (rispettivamente, affinementemente equivalenti) ad una ed una sola di esse.

13.2 Forme canoniche euclidee delle quadriche

In questo paragrafo elenchiamo i polinomi che sono i candidati naturali per le forme canoniche metriche delle quadriche, e per ciascuno di essi, ne studiamo le principali proprietà geometriche.

13.2 Forme canoniche euclidee delle quadriche

DEFINIZIONE 13.8 Dati $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, definiamo la seguente tabella:

	Equazione	Condizioni	Denominazione
(1)	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} = 1$	$a \geq b \geq c > 0$	ellissoide generale
(2)	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} = -1$	$a \geq b \geq c > 0$	ellissoide generale immaginario
(3)	$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 1$	$a > 0, b \geq c > 0$	iperboloide generale ellittico
(4)	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 1$	$a \geq b, c > 0$	iperboloide generale iperbolico
(5)	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = X_3$	$a \geq b > 0$	paraboloide generale ellittico
(6)	$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = X_3$	$a, b > 0$	paraboloide generale iperbolico
(7)	$X_1^2 + \frac{X_2^2}{a^2} + \frac{X_3^2}{b^2} = 0$	$a \geq b > 0$	cono immaginario
(8)	$X_1^2 + \frac{X_2^2}{a^2} - \frac{X_3^2}{b^2} = 0$	$a, b > 0$	cono
(9)	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = -1$	$a \geq b > 0$	cilindro immaginario
(10)	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1$	$a \geq b > 0$	cilindro ellittico
(11)	$aX_1^2 = X_2$	$a > 0$	cilindro parabolico
(12)	$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 1$	$a, b > 0$	cilindro iperbolico
(13)	$X_1^2 + \frac{X_2^2}{a^2} = 0$	$a > 0$	2 piani complessi e coniugati incidenti
(14)	$X_1^2 - \frac{X_2^2}{a^2} = 0$	$a > 0$	2 piani incidenti
(15)	$X_1^2 = -a^2$	$a > 0$	2 piani complessi e coniugati paralleli
(16)	$X_1^2 = a^2$	$a > 0$	2 piani paralleli
(17)	$X_1^2 = 0$		2 piani coincidenti

detta tabella fondamentale per la classificazione metrica delle quadriche di \mathbb{R}^3 .

Notiamo che, dalle condizioni sui parametri, la tabella precedente non contiene ripetizioni.

Grazie al Teorema 13.1 dimostreremo che, per ogni scelta di a , b e c come sopra, le quadriche contenute nella tabella precedente sono tutte e sole le forme canoniche (e quindi le classi di equivalenza) metriche delle quadriche di \mathbb{R}^3 . Discuteremo inoltre alcune importanti conseguenze di questo risultato (Corollario 13.2).

In questo paragrafo, vogliamo invece studiare le proprietà geometriche delle quadriche descritte nella tabella della Definizione 13.8. Tale studio, insieme al Teorema 13.1, si può utilizzare come strumento per dedurre le proprietà geometriche di tutte le quadriche di \mathbb{R}^3 . Per una dettagliata analisi di equazioni parametriche di tali quadriche, rimandiamo il lettore interessato ad e.g. [3] e [12].

Quadriche euclidee generali (a punti reali)

Dalla tabella della Definizione 13.8, vediamo che le quadriche generali a punti reali corrispondono a quelle di tipologie (1), (3), (4), (5) e (6). Notiamo infatti che, dalle equazioni cartesiane corrispondenti a ciascuno dei casi, il rango della quadrica Σ è sempre 4 (Definizione 12.7). Il termine “a punti reali” specifica che ciascuno dei supporti di queste quadriche sarà una superficie in \mathbb{R}^3 .

Ellissoide generale

Sia Σ come in tipologia (1). Notiamo subito che, se $a = b = c$, allora Σ è la sfera di centro O e raggio a ([8.69]). In generale, l'ellissoide possiede sei *vertici*, che sono i punti di intersezione con i tre assi coordinati: $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm c \end{pmatrix}$. È immediato osservare che il supporto dell'ellissoide è una superficie a punti reali, chiusa e limitata, infatti è contenuta nel parallelepipedo dello spazio determinato dalle condizioni $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq c$ cioè delimitato dai piani di equazioni cartesiane $X_1 = \pm a$, $X_2 = \pm b$, $X_3 = \pm c$. In particolare l'ellissoide non può contenere rette.

Si chiamano *semiassi* dell'ellissoide Σ i sei segmenti di estremi l'origine O ed uno dei vertici dell'ellissoide. I numeri a , b e c sono le rispettive lunghezze di questi semiassi.

Osservando che nell'equazione cartesiana dell'ellissoide compaiono solo i quadrati delle indeterminate, si ha immediatamente che l'ellissoide è una superficie simmetrica rispetto ai piani ed alle rette coordinate così come rispetto all'origine. Pertanto essi si dicono, rispettivamente, *piani ed assi principali (o di simmetria)* e *centro di simmetria* dell'ellissoide. È semplice notare che nel caso $a = b = c$, i.e. Σ una sfera, allora ciascuna retta per l'origine è asse principale e ciascun piano per l'origine è piano principale. Osserviamo che l'ellissoide Σ ha uno ed un solo centro di simmetria, come dovevamo aspettarci dalla Definizione 13.6-(i.2). Se consideriamo inoltre la condizione a) nella Definizione 13.6-(i.2), notiamo che l'equazione della forma quadratica associata a Σ , i.e. $Q(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} = 0$, essendo un'eguaglianza a zero di una somma di tre quadrati, ammette come soluzione (reale) esclusivamente la soluzione nulla $(0, 0, 0)$; pertanto la condizione della Definizione 13.6 di “essere ellissoide” è soddisfatta.

Le intersezioni dell'ellissoide con i piani principali sono delle ellissi che vengono dette *ellissi principali*, e sono $\mathcal{C}_1 : \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} - 1 = X_1 = 0$, $\mathcal{C}_2 : \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_3^2}{c^2} - 1 = X_2 = 0$ e $\mathcal{C}_3 : \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - 1 = X_3 = 0$.

Ci si rende conto facilmente della forma del supporto dell'ellissoide sezionandolo con piani paralleli ai piani principali. Per esempio, sezionando con i piani della forma $X_3 = k$, troviamo dei supporti non vuoti se, e solo se, $-c \leq k \leq c$. La sezione ha equazione cartesiana $\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - (1 - \frac{k^2}{c^2}) = X_3 = 0$; per $-c < k < c$, tale sezione è un'ellisse i cui semiassi $a' := a\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$ e $b' := b\sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$, variano proporzionalmente ad a e b , decrescendo al crescere di $|k|$, mentre i vertici scorrono lungo le ellissi principali \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . Per ciascun valore di $k = \pm c$ l'ellisse sezione è invece un'ellisse puntiforme, i.e. l'intersezione è costituita da uno dei vertici di Σ . Pertanto, il supporto dell'ellissoide è come nella FIGURA 13.1.

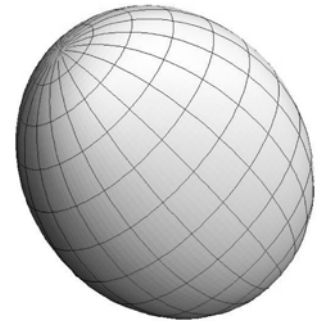


FIGURA 13.1 L'ellissoide generale a punti reali

Sia Σ come in tipologia (3). Questo viene denominato classicamente *iperboloide ellittico*. Osservando che nell'equazione cartesiana di Σ compaiono solo i quadrati delle indeterminate, si ottiene immediatamente che Σ è una superficie simmetrica rispetto ai piani ed alle rette coordinate così come rispetto all'origine. Essi si dicono, rispettivamente, *piani ed assi principali (o di simmetria)* e *centro di simmetria* dell'iperboloide.

Iperboloide generale ellittico o a due falde

In sostanza Σ ha uno ed un solo centro di simmetria, come dovevamo aspettarci dalla Definizione 13.6-(i.2). Se consideriamo inoltre la condizione b) nella Definizione 13.6-(i.2), notiamo che l'equazione della forma quadratica associata a Σ , i.e.

$\mathcal{Q}(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 0$, contiene nel suo supporto per esempio la conica $X_3 = \frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 0$ che è un'iperbole degenera, i.e. è una coppia di rette incidenti in O . Quindi le soluzioni di tale equazione non si riducono esclusivamente alla soluzione nulla. Pertanto la condizione di "essere iperboloidi" della Definizione 13.6 è soddisfatta.

Notiamo che l'iperboloide ellittico Σ possiede un solo *asse reale (o trasverso)*, i.e. solo l'asse x_1 interseca l'iperboloide, l'intersezione è costituita dai *vertici dell'iperboloide*, i.e. dai due punti di coordinate $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gli altri due assi di simmetria sono quindi detti *assi immaginari (o non trasversi)* per l'iperboloide ellittico. La sezione di Σ con il piano principale $X_1 = 0$ è vuota (i.e. non ha punti reali), mentre le sezioni con i piani principali $X_2 = 0$ e $X_3 = 0$ sono iperboli generali a punti reali, aventi ambedue per asse di simmetria reale l'asse x_1 . Più precisamente, Σ non ha supporto nella parte di spazio definita dalle disuguaglianze $|x_1| < a$ mentre è intersecato da ogni piano della forma $X_1 = h$, per $|h| > a$, nell'ellisse di equazione

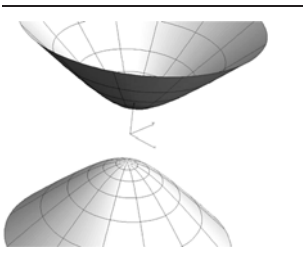


FIGURA 13.2 L'iperboloide generale ellittico o a due falde

Iperboloide generale iperbolico o ad una falda

$\frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{c^2} + 1 - \frac{b^2}{a^2} = X_1 - h = 0$. Ovviamente, per $h = \pm a$ tale ellisse si riduce, corrispondentemente, ad uno dei due vertici dell'iperboloide. Pertanto, Σ è una quadrica a punti reali ed è costituito da due componenti disgiunte (cioè che non si intersecano), le quali si estendono all'infinito al crescere di $|x_i|$, $1 \leq i \leq 3$. Per questi motivi, Σ viene denominato anche iperboloide *a due falde*. In particolare, l'iperboloide ellittico non può contenere rette. Riassumendo, il supporto dell'iperbolide ellittico è come nella FIGURA 13.2.

Sia Σ come in tipologia (4). Questo viene denominato classicamente *iperboloide iperbolico*. Per gli stessi motivi discussi per l'iperboloide ellittico, Σ è una superficie simmetrica rispetto ai piani, alle rette coordinate ed all'origine. Essi si dicono, rispettivamente, *piani ed assi principali (o di simmetria)* e *centro di simmetria* dell'iperboloide.

Anche l'iperbolide iperbolico ha un solo centro di simmetria come dovevamo aspettarci dalla Definizione 13.6-(i.2). Se consideriamo inoltre la condizione b) nella Definizione 13.6-(i.2) di "essere iperboloide", notiamo che l'equazione della forma quadratica associata $Q(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 0$, contiene nel suo supporto per esempio la conica $X_1 = \frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} = 0$ che è di nuovo un'iperbole degenera. Pertanto, la condizione b) precedentemente ricordata è soddisfatta.

Notiamo che l'iperboloide iperbolico Σ possiede due *assi reali (o trasversi)*. Infatti, gli assi x_1 e x_2 intersecano l'iperboloide nei *vertici dell'iperboloide*, i.e. i quattro punti di coordinate $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \\ 0 \end{pmatrix}$. Il terzo asse di simmetria ha intersezione vuota con Σ , ed è quindi detto *asse immaginario (o non trasverso)* per l'iperboloide.

La sezione di Σ con il piano principale $X_3 = 0$ è l'ellisse di equazioni cartesiane $\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - 1 = X_3 = 0$, che viene chiamata l'*ellisse di gola*; invece le sezioni con i piani principali $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$ sono le iperboli generali a punti reali, di equazioni cartesiane, rispettivamente, $\frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} - 1 = X_1 = 0$ e $\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_3^2}{c^2} - 1 = X_2 = 0$, ambedue aventi per asse immaginario (o non trasverso) l'asse x_3 . Più in generale, le sezioni con i piani $X_3 = k$, per un qualsiasi $k \in \mathbb{R}$, sono le ellissi $\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} - 1 - \frac{k^2}{c^2} = X_3 - k = 0$, i cui semiassi variano proporzionalmente ad a e b , crescendo al crescere di $|k|$. In particolare per $k = 0$ riotteniamo l'ellisse di gola, che è quindi è l'ellisse, fra queste ottenute, con semiassi minimi.

Si deduce che l'iperboloide iperbolico ha supporto che è costituito da un'unica componente che si estende indefinitamente. Per questo motivo, Σ viene denominato anche iperboloide *ad una falda*. L'iperboloide iperbolico non ha punti all'interno

della porzione di spazio delimitata dalla condizione $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1$. Per rendersi conto più accuratamente della forma della superficie, si può intersecare Σ con i piani della forma $X_1 = h$ e $X_2 = k$, per $h, k \in \mathbb{R}$. Per esempio, intersecando con il piano $X_1 = h$, si ottiene $\frac{X_2^2}{b^2} - \frac{X_3^2}{c^2} - 1 + \frac{h^2}{a^2} = X_1 - h = 0$. Per ogni scelta di h , con $h \neq \pm a$, questa intersezione definisce un'iperbole generale. Per $|h| < a$, ciascuna di queste iperboli ha come asse reale (o trasverso) l'asse x_2 , mentre per $|h| > a$ ha asse trasverso l'asse x_3 . Invece, per $h = \pm a$, tale intersezione si riduce ad una iperbole degenera, i.e. ad una coppia di rette uscenti da due dei vertici dell'iperboloide. Questo dimostra intanto che Σ contiene delle rette.

Più in generale, possiamo verificare che Σ contiene due differenti insiemi costituiti, ciascuno, da infinite rette. Ciascuno di questi insiemi di rette viene chiamato *schiera* o *rigatura* di Σ . Vediamo subito come si determinano le due schiere. Possiamo scrivere l'equazione cartesiana di Σ anche come

$$[13.14] \quad \left(1 + \frac{X_1}{a}\right) \left(1 - \frac{X_1}{a}\right) = \left(\frac{X_2}{b} + \frac{X_3}{c}\right) \left(\frac{X_2}{b} - \frac{X_3}{c}\right)$$

La [13.14] si può pensare come ottenuta per eliminazione sia di un parametro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tra le equazioni:

$$[13.15] \quad 1 + \frac{X_1}{a} = t \left(\frac{X_2}{b} + \frac{X_3}{c}\right) \quad \text{e} \quad 1 - \frac{X_1}{a} = \frac{1}{t} \left(\frac{X_2}{b} - \frac{X_3}{c}\right)$$

sia di un parametro $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tra le equazioni

$$[13.16] \quad 1 + \frac{X_1}{a} = s \left(\frac{X_2}{b} - \frac{X_3}{c}\right) \quad \text{e} \quad 1 - \frac{X_1}{a} = \frac{1}{s} \left(\frac{X_2}{b} + \frac{X_3}{c}\right)$$

Per ogni fissato valore di t (rispettivamente, di s) come sopra, il sistema lineare di due equazioni e tre indeterminate costituito dalle due equazioni nella [13.15] (rispettivamente, nella [13.16]) determina le equazioni cartesiane di una retta r_t (rispettivamente, r_s) contenuta in Σ . Al variare dei parametri $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, abbiamo le due schiere di rette $\mathcal{T} := \{r_t\}_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ e $\mathcal{S} := \{r_s\}_{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$. Ciascuna schiera è costituita da ∞^1 rette contenute in Σ . Per questi motivi, Σ si dice anche *iperboloide doppiamente rigato*.

Notiamo la seguente proprietà interessante:

- *le rette di una medesima schiera sono sghembe mentre le rette di due schiere diverse sono incidenti.*

Prendiamo due qualsiasi valori distinti $t \neq t'$ e consideriamo le rette $r_t, r_{t'} \in \mathcal{T}$ come nella [13.15]. Considerando il relativo sistema di quattro equazioni in tre indeterminate, notiamo che esso soddisfa la condizione di rette sghembe considerata nel

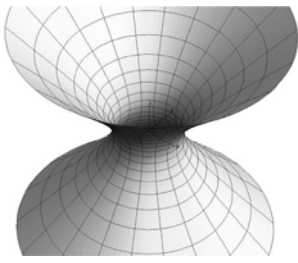


FIGURA 13.3 L'iperboloide iperbolico o ad una falda

paragrafo 8.5. Discorso analogo per due qualsiasi rette distinte della schiera \mathcal{S} come nella [13.16].

Al contrario, per ogni punto $P \in \Sigma$, esistono, e sono univocamente determinate, una retta della schiera \mathcal{T} ed una della schiera \mathcal{S} che passano per P (basta sostituire le coordinate di P nelle precedenti equazioni per trovare univocamente i valori dei parametri t e s). Viceversa, presi comunque s e t in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e considerando il sistema lineare di quattro equazioni in tre indeterminate formato dalle equazioni cartesiane di r_t e di r_s rispettivamente come nella [13.15] e [13.16], vediamo che la matrice dei coefficienti e la matrice completa di questo sistema soddisfano la condizione di incidenza fra due rette considerata nel paragrafo 8.5. Riassumendo, il supporto dell'iperbolide iperbolico è come nella FIGURA 13.3.

Paraboloide generale ellittico

Sia Σ come in tipologia (5). Questo viene denominato classicamente *paraboloide ellittico*. Osservando che nell'equazione cartesiana di Σ compaiono i quadrati delle indeterminate X_1 e X_2 , si ottiene immediatamente che Σ è una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$ e rispetto all'asse x_3 . Si hanno pertanto solamente due *piani principali* (o di simmetria) ed un solo *asse principale* (o di simmetria). L'intersezione di Σ con il suo asse di simmetria è l'origine che è detto *vertice* del paraboloide. Notiamo inoltre che la condizione (i.1) della Definizione 13.6 è soddisfatta dalla matrice simmetrica A della forma quadratica associata a Σ .

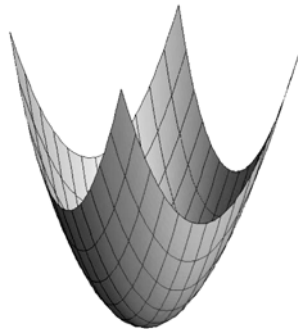


FIGURA 13.4 Il paraboloide ellittico

Dalla sua equazione cartesiana, notiamo che Σ è situato tutto nel semispazio $x_3 \geq 0$. Le sezioni con i piani principali $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$ sono le *parabole principali* $\frac{1}{b^2}X_2^2 - X_3 = X_1 = 0$ e $\frac{1}{a^2}X_1^2 - X_3 = X_2 = 0$, mentre la sezione con il piano coordinato $X_3 = 0$ si riduce al solo vertice del paraboloide.

Le sezioni con i piani della forma $X_3 = k$, con $k > 0$, sono ellissi con semiassi proporzionali ad a e b , crescenti al crescere di k ; in particolare, per $k = 0$ invece si riottiene il vertice, i.e. un'ellisse puntiforme. Invece, le sezioni con i piani $X_1 = h$ e $X_2 = k$ sono parabole rappresentate da $\frac{1}{b^2}X_2^2 - X_3 + \frac{h^2}{a^2} = X_1 - h = 0$ e $\frac{1}{a^2}X_1^2 - X_3 + \frac{k^2}{b^2} = X_2 - k = 0$; queste sono parabole congruenti alle parabole principali. Riassumendo, il supporto del paraboloide ellittico è come nella FIGURA 13.4.

Paraboloide generale iperbolico o a sella

Sia Σ come in tipologia (6). Questo viene denominato classicamente *paraboloide iperbolico*. Per gli stessi motivi discussi per il paraboloide ellittico, Σ è una superficie simmetrica rispetto ai piani coordinati $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$ e rispetto all'asse x_3 ; pertanto anche in questo caso si hanno solamente due *piani principali* (o di simmetria) ed un solo *asse principale* (o di simmetria). Il *vertice* del paraboloide è sempre l'origine O , intersezione di Σ con il suo asse di simmetria. Notiamo che, anche in questo caso, la condizione (i.1) della Definizione 13.6 è soddisfatta dalla matrice simmetrica A della forma quadratica associata a Σ , come deve essere.

Le sezioni con i piani principali sono anche in questo caso le *parabole principali* $\frac{1}{b^2}X_2^2 + X_3 = X_1 = 0$ e $\frac{1}{a^2}X_1^2 - X_3 = X_2 = 0$. L'asse di ambedue le parabole è l'asse x_3 , ma la prima parabola è contenuta nel semispazio $x_3 \leq 0$ mentre l'altra nel semispazio $x_3 \geq 0$. Per la posizione di queste parabole principali, ne deriva per il paraboloido iperbolico la caratteristica forma che appare nella FIGURA 13.5. Per questo motivo, Σ viene anche detto *paraboloide a sella*.

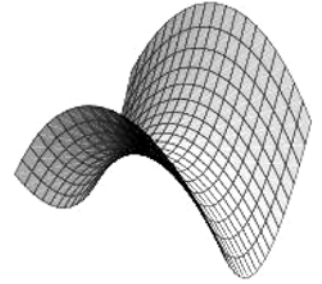


FIGURA 13.5 Il paraboloido iperbolico

Notiamo invece che i piani $X_3 = k$ tagliano su Σ l'iperbole generale $\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} - k = X_3 - k = 0$, se $k \neq 0$, e l'iperbole degenera $\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = X_3 = 0$, per $k = 0$.

Esattamente come l'iperboloido iperbolico, il paraboloido iperbolico contiene due schiere di rette. Infatti, l'equazione cartesiana di Σ si può pensare come ottenuta per eliminazione sia di un parametro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tra le equazioni:

$$[13.17] \quad \frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b} = tX_3 \quad \text{e} \quad \frac{X_1}{a} - \frac{X_2}{b} = \frac{1}{t}$$

sia di un parametro $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tra le equazioni

$$[13.18] \quad \frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b} = \frac{1}{s} \quad \text{e} \quad \frac{X_1}{a} - \frac{X_2}{b} = sX_3$$

Per fissati t e s , le equazioni [13.17] e [13.18] definiscono due rette r_t e r_s , rispettivamente. Al variare dei parametri $t, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, abbiamo le due schiere di rette $\mathcal{T} := \{r_t\}_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ e $\mathcal{S} := \{r_s\}_{s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$, ciascuna delle quali è costituita da ∞^1 rette tutte contenute in Σ . Per questi motivi, Σ si dice anche *paraboloide doppiamente rigato*.

Notiamo la seguenti proprietà interessanti:

- le rette di una medesima schiera sono sghembe mentre le rette di due schiere diverse sono incidenti;
- le rette di una medesima schiera hanno vettori direttori appartenenti alla medesima giacitura.

La prima delle precedenti proprietà si dimostra esattamente come nel caso dell'iperboloido iperbolico. Per la seconda, basta osservare che le rette definite dalla [13.17] sono tutte parallele al piano vettoriale di equazione cartesiana $\frac{X_1}{a} - \frac{X_2}{b} = 0$, mentre quelle definite dalla [13.18] sono tutte parallele al piano vettoriale di equazione cartesiana $\frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b} = 0$.

Quadriche euclidee semplicemente degeneri a punti reali

Dalla tabella fondamentale contenuta nella Definizione 13.8, vediamo che le quadriche semplicemente degeneri a punti reali corrispondono a quelle di tipologie (8), (10), (11) e (12). Notiamo infatti che, dalle equazioni cartesiane corrispondenti a ciascuno dei casi, il rango della quadrica Σ è sempre 3 (Definizione 12.7). Il termine “a punti reali” specifica il fatto che ciascuno dei supporti di queste quadriche sarà una superficie in \mathbb{R}^3 .

Cono (quadrico)

Sia Σ come in tipologia (8). Questo viene denominato *cono quadrico*. Notiamo che detta A la matrice simmetrica della forma quadratica associata a Σ essa ha rango 3, come deve essere dalla condizione (ii.1) della Definizione 13.6. Dall'equazione cartesiana di Σ , vediamo che l'intersezione del cono con il piano $X_3 = 0$ è un'ellisse degenera, i.e. puntiforme. Infatti, tale intersezione si riduce all'origine O , che è detto *vertice del cono*. Notare che il vertice è anche *centro di simmetria* per il cono.

Al contrario, le intersezioni con i piani $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$ determinano ambedue delle iperboli degeneri, quindi coppie di rette incidenti nel vertice O del cono. Più in generale, al variare dei piani nel fascio proprio di asse l'asse x_3 (Definizione 8.12), otteniamo intersezioni con Σ che sono sempre coppie di rette incidenti in O . Ciascuna retta di una qualsiasi di queste coppie viene chiamata *generatrice* del cono. Il motivo del nome generatrice risiede nel fatto che Σ si può generare per rotazione attorno all'asse x_3 (detto pertanto *asse del cono*) di una qualsiasi di queste rette.

Le sezioni con piani della forma $X_3 = h$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono delle ellissi generali a punti reali. Poiché una qualsiasi di queste ellissi viene intersecata in uno ed un solo punto da ogni generatrice di Σ allora, scelta arbitrariamente una di queste ellissi, essa si dice *direttrice* del cono. Sia \mathcal{E} una direttrice del cono. Notiamo che, per ogni punto $P \in \mathcal{E}$ passa una, ed una sola, generatrice di Σ : questa è la retta g_P passante per O e per P . Poiché tutte le generatrici di Σ si ottengono così, allora Σ contiene ∞^1 generatrici, parametrizzate dai punti di \mathcal{E} , ciascuna delle quali passa per il vertice del cono. Per questi motivi, il cono si dice *rigato*.

I parametri direttori della generatrice g_P coincidono con le coordinate di P . Ogni altro punto $Q \neq P$ sulla generatrice g_P determina un'altro vettore direttore per la retta g_P ; quindi le coordinate di Q devono essere proporzionali a quelle di P . Pertanto, il cono Σ se contiene il vettore \overline{P} , per un qualche $P \in \Sigma$, allora contiene tutti i punti corrispondenti agli estremi liberi dei vettori della forma $\lambda \overline{P}$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. In effetti, questo è garantito dal fatto che l'equazione cartesiana del cono Σ è un'equazione omogenea nelle tre indeterminate.

Da ultimo, osserviamo che le sezioni con i piani della forma $X_i = k$, con $1 \leq i \leq 2$ e con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sono delle iperboli generali. Ci si può rendere conto facilmente che tra le sezioni piane non degeneri del cono ci sono anche delle parabole. In definitiva, il supporto del cono è come nella FIGURA 13.6.

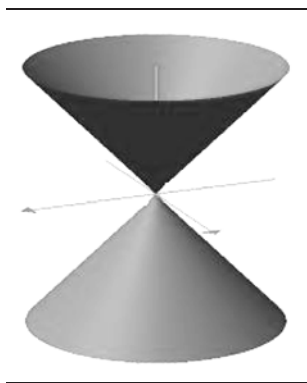


FIGURA 13.6 Il cono

Le superfici descritte nelle tipologie (10), (11) e (12) fanno parte tutte e tre della famiglia dei *cilindri*. Un cilindro (reale) è per definizione una superficie luogo geometrico di ∞^1 rette parallele, dette *generatrici* del cilindro, ciascuna delle quali interseca in uno ed in un solo punto una curva \mathcal{C} contenuta in Σ , che viene chiamata una *direttrice* del cilindro. I parametri direttori l , m e n delle generatrici del cilindro sono quindi *costanti*, i.e. uguali per tutte le generatrici. Per ogni $Q \in \mathcal{C}$, la generatrice individuata da Q , che denoteremo con g_Q , non è altro che la retta passante per Q e con parametri direttori l , m e n dati. Come nel caso del cono, il cilindro è quindi *rigato*.

Supponiamo di avere in \mathbb{R}^3 un'equazione della forma $P(X_1, X_2) = 0$, dove $P(X_1, X_2)$ è un polinomio di secondo grado, a coefficienti reali (come accade per esempio nelle tipologie (10), (11) e (12)). Se $P(X_1, X_2) = 0$ è semplicemente degenere ed a punti reali, allora tale equazione descrive un cilindro Σ con generatrici parallele all'asse x_3 , i.e. $l = 0$, $m = 0$ ed $n = 1$, ed una direttrice è data dalla curva \mathcal{C} , che ha la stessa equazione di Σ ma letta nel piano $X_3 = 0$; in altri termini la direttrice \mathcal{C} , di equazioni $P(X_1, X_2) = X_3 = 0$, è una sezione piana di Σ . Poiché Σ è per ipotesi semplicemente degenere e poiché $P(X_1, X_2)$ è indipendente da X_3 , ne segue che \mathcal{C} è generale.

Per ogni $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ogni altra sezione piana di Σ della forma $P(X_1, X_2) = X_3 - k = 0$ è un'altra direttrice, congruente a \mathcal{C} , perché ottenuta per traslazione di \mathcal{C} su un piano parallelo al piano coordinato $X_3 = 0$.

Se invece consideriamo le sezioni piane della forma $X_1 = h$ o $X_2 = h'$, $h, h' \in \mathbb{R}$, abbiamo varie possibilità. Consideriamo per esempio una sezione di Σ con un piano della forma $X_1 = h$, per un qualche $h \in \mathbb{R}$. Sia r la retta di equazione cartesiana $X_1 - h = X_3 = 0$ e denotiamo con π il piano $X_3 = 0$ e con τ il piano $X_1 = h$. Pertanto la direttrice \mathcal{C} è complanare con r . Possiamo considerare allora le mutue posizioni di r rispetto a \mathcal{C} sul piano π :

- se r è secante \mathcal{C} , poiché essa è una conica, allora $r \cap \mathcal{C} = \{Q_1, Q_2\}$ è costituita da due punti distinti. Pertanto, l'intersezione di Σ con τ è una parabola semplicemente degenere a punti reali, in altri termini è costituita da due rette parallele che sono le due generatrici g_{Q_1} e g_{Q_2} di Σ ;
- se r è tangente la direttrice \mathcal{C} in un punto Q , allora la molteplicità di intersezione tra r e \mathcal{C} è 2 (Definizione 1.2 e Proposizione 1.1 dell'Approfondimento sul web *Interpretazione geometrica del rango di una conica*). Tale punto Q si ottiene da $\Sigma \cap \pi \cap \tau$, in altri termini si ottiene considerando il sistema di tre equazioni $P(X_1, X_2) = X_3 = X_1 - h = 0$. Pertanto, il punto Q avrà coordinate della forma $Q = \begin{pmatrix} h \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$, con q tale che $P(h, q) = 0$. Poiché questa intersezione è di molteplicità due, prendendo equazioni parametriche della retta r , $X_1 = h$, $X_2 = q + t$, $X_3 = 0$, con h fissato e $t \in \mathbb{R}$ un parametro, se sostituiamo nel polinomio $P(X_1, X_2) = 0$ queste espres-



FIGURA 13.7 Cilindri quadrici

sioni, otteniamo un polinomio $\Psi(t) := P(h, q + t)$ che è della forma in $\Psi(t) = \alpha t^2$, con α una costante non nulla (Definizione 1.2 dell'Approfondimento sul web *Interpretazione geometrica del rango di una conica*). Poiché però il polinomio $P(X_1, X_2)$ è indipendente da X_3 , il medesimo comportamento si ha per l'intersezione $P(X_1, X_2) = X_1 - h = 0$. In altri termini, l'intersezione tra Σ e il piano τ determina una parabola doppiamente degenera, i.e. la generatrice g_Q è contata con molteplicità 2. Si può dimostrare che la motivazione per cui la generatrice g_Q è contata doppiamente discende dal fatto che il piano τ è allora un piano che è tangente al cilindro lungo tutta la generatrice del cilindro. Questo però richiederebbe ulteriori argomenti preliminari sulla teoria delle superfici. Rimandiamo il lettore eventualmente interessato ad approfondimenti a e.g. [9, par. 7.11] o [12, parr. 33.5.2 e 35.9.2].

- Se infine la retta r è esterna a \mathcal{C} , allora abbiamo ovviamente $\Sigma \cap \tau = \emptyset$. Quanto discusso in generale sui cilindri si applica ai casi particolari (10), (11) e (12) della tabella nella Definizione 13.8. Sia Σ uno qualsiasi di questi cilindri. Notiamo prima di tutto che la matrice simmetrica A della forma quadratica associata a Σ è o di rango 2, nei tipi (10) e (12), o di rango 1, nel tipo (11). In ogni caso, la condizione (ii.2) della Definizione 13.6 è soddisfatta. Essendo tutti cilindri descritti da un polinomio della forma $P(X_1, X_2) = 0$, in tutti e tre i casi le generatrici sono sempre parallele all'asse x_3 .
- Nel caso (10), la direttrice \mathcal{C} sul piano $X_3 = 0$ è un'ellisse generale a punti reali, da qui il nome di *cilindro ellittico* (FIGURA 13.7). Tutte le sezioni parallele al piano $X_3 = 0$ sono sempre ellissi congruenti a \mathcal{C} . Pertanto tale cilindro è costituito da una sola componente, o *falda*, illimitata nelle x_3 .
- Nel caso (11), la direttrice \mathcal{C} sul piano $X_3 = 0$ è una parabola, da qui il nome di *cilindro parabolico* (FIGURA 13.7). Anche in questo caso, tale cilindro è costituito da una sola falda illimitata.
- Nel caso (12), la direttrice \mathcal{C} sul piano $X_3 = 0$ è un'iperbole, da qui il nome di *cilindro iperbolico* (FIGURA 13.7). Differentemente dai due casi precedenti, visto che la direttrice \mathcal{C} è un'iperbole, il cilindro Σ è costituito da due falde disgiunte ed illimitate.

Quadriche euclidee doppiamente degeneri (a punti reali)

Dalla tabella contenuta nella Definizione 13.8, vediamo subito che le quadriche doppiamente degeneri a punti reali corrispondono ai casi (14) e (16). In effetti, in ogni caso la matrice simmetrica completa associata alla quadrica ha rango 2.

Nel caso (14), notiamo che l'equazione cartesiana si può fattorizzare in $X_1^2 - \frac{X_2^2}{a^2} = (X_1 - \frac{X_2}{a})(X_1 + \frac{X_2}{a}) = 0$. È quindi chiaro che la quadrica Σ è costituita da due piani distinti π_1 e π_2 , di equazioni rispettivamente $X_1 - \frac{X_2}{a} = 0$ e $X_1 + \frac{X_2}{a} = 0$, che si intersecano lungo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, di equazioni $X_1 - \frac{X_2}{a} = X_1 + \frac{X_2}{a} = 0$ (FIGURA 13.8).

Nel caso (16), allo stesso modo, fattorizziamo il polinomio $X_1^2 - a^2 = 0$ in $(X_1 - a)(X_1 + a) = 0$, che determina Σ come l'unione di due piani paralleli al piano coordinato $X_1 = 0$, che è piano di simmetria per la quadrica Σ (FIGURA 13.8). Ciascuno dei due piani è a distanza a dal piano di simmetria.

Dalla lista nella Definizione 13.8, le quadriche a punti esclusivamente immaginari sono date dalle tipologie (2), (9) e (15). In ciascuno dei tre casi, poiché l'equazione cartesiana è sempre un'eguaglianza a -1 (rispettivamente, a $-a^2$) di una somma di quadrati (rispettivamente, di un quadrato), non possono esistere soluzioni reali. Pertanto il supporto è vuoto in tutti e tre i casi.

Nel caso (2), la matrice simmetrica completa \tilde{A} è di rango massimo, ed il primo membro dell'equazione è identica a quella dell'ellissoide a punti reali; da qui la terminologia *ellissoide generale a punti non reali*. Analogo ragionamento nei casi (9) e (15).

Dalla tabella nella Definizione 13.8, le quadriche a punti non esclusivamente reali sono date dalle tipologie (7) e (13). Nel caso (7), la matrice simmetrica completa \tilde{A} è di rango 3, quindi la quadrica è semplicemente degenere. È immediato osservare che l'equazione cartesiana $\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{b^2} = 0$, esprimendo un'eguaglianza a zero di una somma di tre quadrati, ha come unica soluzione reale, la soluzione nulla. Pertanto, il supporto è costituito dall'origine O . Il nome *cono immaginario* deriva dal fatto che è una quadrica semplicemente degenere e con un'equazione più simile a quella del cono che a quella del cilindro.

Nel caso (13), la matrice simmetrica completa \tilde{A} è di rango 2 quindi la quadrica è doppiamente degenere. L'equazione cartesiana $X_1^2 + \frac{X_2^2}{b^2} = 0$ ha come unica soluzione reale $X_1 = X_2 = 0$, contata con molteplicità 2. Pertanto, il supporto di tale quadrica è l'asse x_3 e la quadrica si può vedere come questa retta contata con molteplicità 2.

L'unico caso di quadrica triplamente degenere è quella della tipologia (17) nella tabella della Definizione 13.8. È immediato osservare che la matrice simmetrica completa ha rango 1 e che il supporto di una tale quadrica è il piano coordinato $X_1 = 0$. Pertanto la quadrica si può vedere come tale piano, contato con molteplicità due.

Concludiamo con un'osservazione importante, che in seguito sarà utile quando discuteremo la procedura generale di riduzione a forma canonica metrica delle quadriche (Teorema 13.1).

Quadriche euclidee a punti esclusivamente immaginari

Quadriche euclidee a punti non esclusivamente reali



FIGURA 13.8 Quadriche doppiamente degeneri a punti reali

Quadriche euclidee triplamente degeneri

PROPOSIZIONE 13.1 *Si consideri la tabella fondamentale nella Definizione 13.8:*

- *le tipologie (1)-(17) elencate nella tabella descrivono quadriche a due a due non congruenti. In altri termini, per ogni $1 \leq i \neq j \leq 17$, una qualsiasi quadrica di tipo (i) non è mai congruente ad una qualsiasi quadrica di tipo (j);*
- *per ogni i, t.c. $1 \leq i \leq 16$, al variare dei parametri come in tipologia (i) si descrivono quadriche a due a due non congruenti appartenenti alla tipologia (i).*

Dimostrazione Come nel caso delle coniche, dalla Definizione 13.4, il rango di una quadrica Σ è una proprietà metrica; quindi, una prima diversificazione tra le varie tipologie si ha utilizzando il rango della quadrica. A parità di rango, dalle Definizioni 13.6 e 13.5, sono invarianti metrici anche il rango della matrice simmetrica A della forma quadratica Q associata a Σ ed il segno del determinante della matrice simmetrica completa \tilde{A} associata a Σ . Questi sono pertanto un'ulteriore strumento per diversificare i tipi di quadriche della tabella fondamentale.

A parità di tutte le precedenti proprietà metriche, dall'Osservazione 13.4, ricordiamo che due quadriche isometriche devono avere supporti congruenti. Pertanto, ricordando tutte le proprietà geometriche descritte precedentemente per le quadriche della tabella è facile concludere che, per ogni $1 \leq i \neq j \leq 17$, una qualsiasi quadrica di tipo (i) non è mai congruente ad una qualsiasi quadrica di tipo (j).

Ora che sappiamo distinguere quadriche appartenenti a differenti tipologie della tabella fondamentale per la classificazione metrica, dobbiamo porci il problema di poter distinguere due quadriche appartenenti ad una medesima tipologia (i), per ogni $1 \leq i \leq 16$, ma che non sono isometriche. Prese Σ e Σ' due quadriche dello stesso tipo (i) ma definite da equazioni cartesiane aventi parametri distinti, per compiere questa distinzione, possiamo utilizzare l'Osservazione 13.4. Infatti, due quadriche isometriche devono avere supporti congruenti; in particolare, laddove i supporti sono reali, devono essere conservate per esempio le distanze fra i punti, gli angoli ecc.

Pertanto, per quanto riguarda le tipologie (i), con $i = 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 14$ e 16 in cui i supporti sono sempre superfici reali, possiamo procedere come nel caso delle coniche utilizzando le proprietà geometriche descritte precedentemente. Potremo distinguere due quadriche della medesima tipologia (i), ma con parametri diversi, utilizzando per esempio la lunghezza dei semiassi reali (o trasversi), le proprietà metriche delle sezioni piane ottenute mediante i piani coordinati o piani paralleli ad essi ecc.

A titolo di esempio, se prendiamo $i = 1$, e consideriamo due ellissoidi generali a punti reali $\Sigma_{a,b,c}$ e $\Sigma_{d,e,f}$, con $a \geq b \geq c > 0$, $d \geq e \geq f > 0$, definiti da equazioni cartesiane come in (1), con parametri $(a, b, c) \neq (d, e, f)$, allora i due ellissoidi non possono essere congruenti. Infatti, dall'ipotesi sui parametri distinti, deve esistere una coppia di semiassi di

13.2 Forme canoniche euclidee delle quadriche

$\Sigma_{d,e,f}$ con lunghezza diversa da tutte le coppie di semiassi di $\Sigma_{a,b,c}$. Nei casi di iperboloidi, paraboloidi, coni e cilindri si può ragionare in modo analogo, considerando anche le proprietà metriche delle coniche sezioni piane (dimostrazione della Proposizione 12.1). Lasciamo al lettore per esercizio di vagliare caso per caso, tutti le tipologie (i), per $i = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11$ e 12 .

Per quanto riguarda la tipologia (14), se prendiamo due equazioni della forma $X_1^2 - \frac{X_2^2}{a^2} = 0$ e $X_1^2 - \frac{X_2^2}{d^2} = 0$, con $a, d > 0$ e $a \neq d$, esse rappresentano due coppie di piani reali incidenti. Potremo distinguere le due coppie di piani dal punto di vista metrico per mezzo del calcolo dell'angolo fra i due piani di ciascuna coppia (par. 8.5). Tale calcolo coinvolgerà i coefficienti delle equazioni dei piani (i.e. le coordinate dei vettori normali a tali piani).

Per quanto riguarda la tipologia (16), se prendiamo Σ_a e Σ_d , con $a \neq d$, le quadriche sono due coppie di piani paralleli al piano $X_1 = 0$, dove ciascun piano della coppia Σ_a è a distanza a da questo piano coordinato mentre ciascun piano della coppia Σ_d è a distanza d dal medesimo piano coordinato.

I casi residui non si possono trattare con i metodi precedenti; infatti se $i = 2, 9$ e 15 , il supporto di una qualsiasi quadrica di tipo (i) è vuoto mentre, se $i = 7$ o 13 , i supporti di tutte le quadriche di tipo (i) sono, rispettivamente, l'origine O e l'asse x_3 .

Nel caso (15), si può procedere con un ragionamento per assurdo, esattamente a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 12.1. In altri termini, si suppone l'esistenza di una isometria F che trasforma una data equazione in un'altra della stessa classe ma con parametri diversi, si traduce il tutto in una relazione matriciale e si trova che la relazione matriciale sussiste se, e solo se, invece i parametri sono uguali.

Per i casi residui, possiamo utilizzare una strategia più rapida. Consideriamo dapprima i casi (2) e (9). Prendiamo due qualsiasi equazioni in tipologia (i), $i = 2, 9$, ma che abbiano parametri diversi. Siano A e B le rispettive matrici 3×3 delle forme quadratiche associate a tali quadriche. Se le due quadriche fossero isometriche, allora deve esistere M ortogonale 3×3 , per cui valga la relazione [13.13]. Ricordiamo che il polinomio caratteristico è invariante per per la relazione di similitudine (Teorema 10.4) e che, quando M è ortogonale, la relazione di similitudine coincide con la relazione di congruenza (Corollario 11.1). In altri termini, i polinomi caratteristici $P_A(t)$ e $P_B(t)$ coincidono, quindi anche le loro soluzioni. Pertanto, gli autovalori di A devono coincidere con quelli di B . Se siamo quindi per esempio in tipologia (2) e stiamo considerando le due quadriche

$$\Sigma_{a,b,c} : \frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} + \frac{X_3^2}{b^2} = -1 \quad \text{e} \quad \Sigma_{d,e,f} : \frac{X_1^2}{d^2} + \frac{X_2^2}{e^2} + \frac{X_3^2}{f^2} = -1$$

con $a \geq b \geq c > 0$, $d \geq e \geq f > 0$ e $(a, b, c) \neq (d, e, f)$, allora i polinomi che danno le precedenti due equazioni non possono essere congruenti l'uno all'altro. Infatti, le matrici delle forme quadratiche associate sono diagonali, avendo sulla diagonale principale i coefficienti

13 Quadriche dello spazio cartesiano \mathbb{R}^3

del primo membro delle rispettive equazioni cartesiane; questi elementi diagonali coincidono con gli autovalori delle matrici che pertanto sono distinti (notiamo infatti che entrambe le matrici hanno $a_{1,1} = -1$). Analogo discorso per la tipologia (9). In definitiva, in queste tipologie, abbiamo sempre anche quadriche a due a due non congruenti.

Nelle tipologie (7) e (13) possiamo applicare il discorso precedente sugli autovalori per determinare le classi di congruenza di polinomi in una medesima tipologia. Per esempio, se siamo nel caso (7) e stiamo considerando le due quadriche

$$\Sigma_{a,b} : X_1^2 + \frac{X_2^2}{a^2} + \frac{X_3^2}{b^2} = 0 \quad \text{e} \quad \Sigma_{d,e} : X_1^2 + \frac{X_2^2}{d^2} + \frac{X_3^2}{e^2} = 0$$

con $a \geq b > 0$, $d \geq e > 0$ e $(a, b) \neq (d, e)$ allora, per gli stessi motivi di cui sopra, i polinomi che determinano le due equazioni non possono essere congruenti l'uno all'altro (notiamo infatti che entrambe le matrici hanno $a_{2,2} = 1$). Analogo discorso per la tipologia (13).

In conclusione, al variare dei parametri, in ogni tipologia (i) descriviamo quadriche a due a due non congruenti. □

Nel prossimo paragrafo, vedremo che queste classi distinte di equivalenza metrica di quadriche di \mathbb{R}^3 sono esattamente tutte e sole le classi di equivalenza metrica.

13.3 Riduzione a forma canonica metrica delle quadriche. Classificazione metrica

Dimostriamo ora il risultato fondamentale della teoria delle quadriche euclidee. Come nel caso delle coniche, la sua dimostrazione è costruttiva, nel senso che descrive la cosiddetta procedura (o algoritmo) di *riduzione a forma canonica metrica* di una qualsiasi quadrica Σ di \mathbb{R}^3 . In altri termini, questo algoritmo permette di trasformare per mezzo di una successione di isometrie, una qualsiasi quadrica Σ di \mathbb{R}^3 in una, ed una sola, di quelle della tabella della Definizione 13.8 (per un approccio completo e valido più in generale per iperquadriche di \mathbb{R}^n , cf. e.g. [5, 22.4]).

TEOREMA 13.1 *Ogni quadrica Σ è congruente ad una, ed una sola, delle quadriche contenute nella tabella della Definizione 13.8.*

Dimostrazione La dimostrazione è molto simile a quella del Teorema 12.1. Sia Σ una qualsiasi quadrica di equazione cartesiana

$$[13.19] \quad P(X_1, X_2, X_3) := a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 + 2b_1X_1 + 2b_2X_2 + 2b_3X_3 + c = 0$$

con $a_{ij}, b_h, c \in \mathbb{R}$, $1 \leq i < j \leq 3$, $1 \leq h \leq 3$, tali che almeno un $a_{ij} \neq 0$. La procedura che ci apprestiamo a descrivere, come nel caso delle coniche, si può suddividere in due passi: