Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

II Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si e' autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ munito di base canonica $\mathcal{E}$. Si consideri $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ la cui matrice rappresentativa in base $\mathcal{E}$ sia la matrice

$$A := M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare le dimensioni delle componenti primarie per ogni autovalore di f, il polinomio minimo di f e la sua forma canonica di Jordan.

(ii) Determinare una base di Jordan $\mathcal{J} := \{\underline{j}_1, \underline{j}_2, \underline{j}_3, \underline{j}_4\}$ per f, scrivendo i vettori $\underline{j}_i$, $1 \leq i \leq 4$, in combinazione lineare dei vettori della base canonica $\mathcal{E}$.

Esercizio 2. Nel piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sia assegnato un riferimento affine $RA(O; x, y)$. Si consideri il completamento proiettivo di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dato dall'inclusione naturale

$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

(in altri termini $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e' identificato con la carta affine $\mathbb{A}_0$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$) e siano $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Si consideri la retta affine $r \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $P = (1, 1) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e di vettore direttore $\underline{v}_r = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$-

(i) Determinare:

- le coordinate omogenee di r_∞, i.e. del punto improprio di r,
- equazioni parametriche omogenee ed equazione cartesiana omogenea della retta $\overline{r} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ chiusura proiettiva della retta affine r,
- equazione cartesiana della retta affine r_1 che e' traccia della retta proiettiva $\overline{r}$ nella carta affine

$$\mathbb{A}_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_1 \neq 0\}$$

di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$,

- punto improprio $(r_1)_\infty$ della retta affine r_1 nella carta affine $\mathbb{A}_1$.

(ii) Considerato il punto $Q = [1, 1, 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare le formule della mappa

$$\pi_{Q,H_0} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \{Q\} \twoheadrightarrow H_0$$

di proiezione dal punto Q sulla retta fondamentale $H_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \mid x_0 = 0\}$, i.e.

$$\pi_{Q,H_0}([p_0, p_1, p_2]) = ?$$

Esercizio 3. Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico e coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ rispetto a questo riferimento, si considerino i punti

$$P = [1, 0, 0, 1] \text{ e } Q = [1, -1, -1, -1]$$

e sia r la retta congiungente, i.e.

$$r = \mathcal{L}(P, Q).$$

Si consideri la mappa naturale

$$\delta : (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^* \to \{\text{Iperpiani di } \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}\}$$

e si denotino con $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ le coordinate omogenee duali (o Plueckeriane) nello spazio proiettivo duale $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$.

(i) Determinare:

- la dimensione della stella di rette di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di centro il punto P,
- la dimensione della stella $\Lambda_1(p)$ di piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di centro il punto P,
- equazioni cartesiane omogenee della retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

(ii) Determinare equazioni cartesiane omogenee, nelle coordinate Plueckeriane, dei sottospazi di $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ dati da

$$r^\vee = \delta^{-1}(\Lambda_1(r)) \text{ e } p^\vee = \delta^{-1}(\Lambda_1(p)),$$

deducendo una relazione di inclusione fra essi.

(iii) Determinare equazioni cartesiane di tutti i piani di $\Lambda_1(r)$ che passano per il punto $H = [0, 1, 2, 0] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 1

Dato $f = L_A \in End(\mathbb{R}^4)$ t.c. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$

(i) Determinare la forma canonica di Jordan di A, scrivendo la dimensione delle componenti primarie per ogni autovalore di A e $m_f(t)$ polinomio minimo.

(ii) Determinare una base di Jordan per $\mathbb{R}^4$, scrivendo i vettori della base di Jordan in coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$

Svolgimento

(1) $\det(A - tI_4) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2-t & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 5-t & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -t \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Riga 1}}}{=}$

$= (2-t) \det \begin{pmatrix} 2-t & -4 & -3 \\ 0 & 5-t & 3 \\ 0 & -2 & -t \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Laplace} \\ \text{Col 1}}}{=} (2-t)^2 \det \begin{pmatrix} 5-t & 3 \\ -2 & -t \end{pmatrix}$

$= (2-t)^2 \left(+t(t-5) + 6 \right) = (2-t)^2 (t^2 - 5t + 6) =$

$= (2-t)^2 (t-2)(t-3) = (t-2)^3 \cdot (t-3)$

Pertanto

$m_a(3) = m_g(3) = 1$

$m_a(2) = 3$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^4 = V_3 \oplus V_2$

con $V_3 = \{\text{componente primaria di } A \text{ per } \lambda = 3\} =$

$V_3(A,1) = \{\text{autospazio di } A \text{ per } \lambda = 3\}$ $\dim(V_3) = 1$

Invece

$$V_2 = \{\text{comp. primaria di } A \text{ per } \lambda = 2\} \quad \text{e} \quad \dim(V_2) = 3$$

Notiamo che per $\lambda = 3$

$$B_3 := A - 3I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}(B_3) = 3 \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker}(B_3) = \begin{cases} -x_1 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_4 = t$$
$$x_3 = -\tfrac{3}{2}t$$
$$x_2 = -4\left(-\tfrac{3}{2}t\right) - 3t = 6t - 3t = 3t$$
$$x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_3 = \text{Spam}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}}$$

Invece per $\lambda = 2$

$$B_2 := A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg}(B_2) = 3 \quad \text{visto che} \quad \det\begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad V_2(A,1) = \{\text{autospazio per } \lambda = 2\} =$$
$$= \text{Spam}\{\underline{e}_2\}$$

Siccome $mg(2) = 1$, la forma canonica di Jordan di A è necessariamente

$$J_A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

a meno di una permutazione dei blocchi $\Rightarrow m_{L_A}(t) = p_{L_A}(t)$.

(2) Per determinare una base di Jordan considero

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -6 & -6 \\ +3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -6 & -6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 & -6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(B_2^3) = \{ \underbrace{x_1 + x_3 + x_4 = 0} \}$$

è l'equazione cartesiana della componente primaria V_2 e abbiamo

$$\{\underline{0}\} \subset V_2(A,1) = \mathrm{Ker}(B_2) \subset V_2(A,2) = \mathrm{Ker}(B_2^2) \subset V_3 = V_3($$

$V_2(A,1)$: autospazio di dim $= 1$

$V_2(A,2)$: $\begin{cases} 7x_1 + 6x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

V_3: $x_1 + x_3 +$

equiv. a $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Prendo

$$\underline{v} \in V_3 \setminus \ker(B_2^2) \quad \text{ad esempio} \quad \boxed{\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Ora

$$B_2(\underline{v}) = B_2(\underline{e}_1 - \underline{e}_4) = B_2(\underline{e}_1) - B_2(\underline{e}_4)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(B_2^2) \setminus \ker(B_2) \longrightarrow \text{ho} \quad \boxed{\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Infine

$$B_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = B_2(-\underline{e}_2) + B_2(\underline{e}_3) + B_2(-\underline{e}_4)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\underline{e}_2 \quad \text{come}$$

ci si doveva aspettare visto che $\ker(B_2) = \operatorname{Span}\{\underline{e}_2\}$

Dunque una base di Jordan J è:

$$J = \left\{ \underline{j}_1 = \underline{e}_2,\ \underline{j}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{j}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{j}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Con tale scelta

$$A(\underline{j}_1) = 2\,\underline{j}_1$$

$$A(\underline{j}_2) = (B_2 + 2I_4)(\underline{j}_2) = B_2(\underline{j}_2) + 2\,\underline{j}_2 = \underline{j}_1 + 2\,\underline{j}_2$$

$$A(\underline{j}_3) = (B_2 + 2I_4)(\underline{j}_3) = B_2(\underline{j}_3) + 2\,\underline{j}_3 = \underline{j}_2 + 2\,\underline{j}_3$$

$$A(\underline{j}_4) = 3\,\underline{j}_4.$$

Esercizio 2

Considero $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ come carta affine $\mathbb{A}^2_0$ di $\mathbb{P}^2$

$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

Sia $r \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ la retta affine che passa per $P = (1, 1)$ e di vettore direttore $\underline{v}_r = (3, -2)$

(i) Determinare r_∞, equazioni cartesiane omogenee ed equazioni parametriche omogenee per $\bar{r} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ed equazione cartesiana di $r_1 \subset \mathbb{A}_1$, traccia di $\bar{r}$ in carta $\mathbb{A}_1$ ed $(r_1)_\infty$.

(ii) Considerato $Q = [1, 1, 0] \in \mathbb{P}^2$, determinare equazioni della proiezione

$$\pi_{Q, H_0} : \mathbb{P}^2 \setminus \{Q\} \longrightarrow H_0 : \{x_0 = 0\}$$

(i) $r_\infty = [0, 3, -2] \in H_0 = \{x_0 = 0\}$

La retta $\bar{r}$ è la retta per $P = [1, 1, 1]$, $r_\infty = [0, 3, -2] \in \mathbb{P}$

cioè

$$\bar{r} \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = \lambda + 3\mu \\ x_2 = \lambda - 2\mu \end{cases} \qquad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

mentre

$$\bar{r} : \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2x_0 + 3x_2 - (3x_0 - 2x_1) = 0$$

$$-5x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0 \quad \Rightarrow \bar{r} : 5x_0 - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

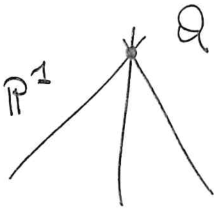
Infine $r_1 = \bar{r} \cap \mathbb{A}_1$; se poniamo $u = \frac{x_0}{x_1}$ e $v = \frac{x_2}{x_1}$ $\quad r_1 : 5u - 3v - 2 = 0$

(iii) $Q = [1, 1, 0] \notin H_0$

Per determinare la proiezione, considero il fascio di rette di centro Q: $\begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

cioè $\quad \lambda(x_0 - x_1) + \mu x_2 = 0 \iff$

$$\lambda x_0 - \lambda x_1 + \mu x_2 = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$



Per considerare $\pi_{Q, H_0}: \mathbb{P}^2 \setminus \{Q\} \twoheadrightarrow H_0$

$\forall P \neq Q$, $\quad P = [P_0, P_1, P_2]$ t.c. o $P_2 \neq 0$ o $P_0 \neq P_1 \Rightarrow$

$$\lambda P_0 - \lambda P_1 + \mu P_2 = 0 \iff$$

$$\lambda(P_0 - P_1) + \mu P_2 = 0$$

se $P_0 - P_1 = 0$ $\iff P_2 \neq 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow$ ho $\lambda(x_0 - x_1) = 0$

$\Rightarrow$ tutti i punti della forma $[P_0, P_0, P_2]$ si proiettano su $\begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ cioè $[0, 0, 1]$

$$\pi_{Q, H_0}([P_0, P_0, P_2]) = [0, 0, 1] \quad \forall [P_0, P_2] \in \mathbb{P}^1$$

se $P_2 = 0$ $\Rightarrow P_0 \neq P_1 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ ho $x_2 = 0$

$\Rightarrow$ tutti i punti della forma $[P_0, P_1, 0]$ si proiettano su $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ i.e. $\pi_{Q, H_0}([P_0, P_1, 0]) = [0, 1, 0]$

se $(P_0 - P_1) \cdot P_2 \neq 0$ $\qquad \dfrac{\lambda}{\mu} = -\dfrac{P_2}{P_0 - P_1}$ cioè

$$[\lambda, \mu] = [P_2, P_1 - P_0]$$

Pertanto la retta del fascio per $P = [P_0, P_1, P_2]$ è

$$P_2(x_0 - x_1) + (P_1 - P_0)x_2 = 0$$

e tagliando con $x_0 = 0$ si ottiene $\pi_{Q, H_0}(P) = \begin{cases} x_0 = 0 \\ (P_1 - P_0)x_2 - P_2 x_1 = \end{cases}$

cioè $\quad \pi_{Q, H_0}([P_0, P_1, P_2]) = [0, P_1 - P_0, P_2]$ ben def. $\iff [P_0, P_1, P_2]$
$\neq Q$

Esercizio 3

$\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$P = [1, 0, 0, 1]$ $\quad Q = [1, -1, -1, -1] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$[a_0, a_1, a_2, a_3]$ coordinate di $(\mathbb{P}^3)^*$.

(i) Dimensione della stella di rette di $\mathbb{P}^3$ di centro P, dimensione della stella di piani di $\mathbb{P}^3$ di centro P

(ii) Denotata con $r = \mathcal{L}(P, Q) \subset \mathbb{P}^3$ eq. cartesiane dei sottospazi $r^\vee$ e $P^\vee$ di $(\mathbb{P}^3)^*$ corrispondenti, rispett, a $\Lambda_1(r)$ e $\Lambda_1(P)$ deducendo una relazione di inclusione tra $r^\vee$ e $P^\vee$

(iii) Equazioni cartesiane dei piani di $\Lambda_1(r)$ passanti per $H = [0, 1, 2, 0] \in \mathbb{P}^3$

dim

(i) $P = [1, 0, 0, 1]$ è punto esterno per esempio a $H_0 = \{x_0 = 0\}$

La stella di rette di centro P è $C_P(H_0)$ = cono proiettante H_0 da $P \Rightarrow \dim(C_P(H_0)) = \dim(H_0) = 2$

Invece la stella di piani di centro P è

$$\Lambda_1(P)$$

se $W = \operatorname{Span}\{\underline{v}_P\} \subset \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim(\operatorname{Ann}(W)) = 4 - 1 = 3$

e $\dim(\Lambda_1(P)) = \dim(\mathbb{P}(\operatorname{Ann}(W))) = 3 - 1 = 2$

(ii) $\mathcal{L}(P, Q)$: $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\Lambda_1(r)$ è il fascio di piani

$$\lambda(x_0+x_1+x_2-x_3)+\mu(x_1-x_2)=0$$

$$\lambda x_0+(\lambda+\mu)x_1+(\lambda-\mu)x_2-\lambda x_3=0 \qquad [\lambda,\mu]\in\mathbb{P}^1$$

che in $(\mathbb{P}^3)^*$ corrisponde alla retta proiettiva

$$\begin{cases} a_0=\lambda \\ a_1=\lambda+\mu \\ a_2=\lambda-\mu \\ a_3=-\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} a_0=-a_3 \\ a_1+a_2=2a_0 \end{cases}$$

Tale retta proiettiva ha eq. cartesiana $\boxed{\begin{cases} a_0+a_3=0 \\ 2a_0-a_1-a_2=0 \end{cases}}$ $r^\vee$

in $(\mathbb{P}^3)^*$

Invece $\Lambda_1(P)$ è corrisponde ad un piano in $(\mathbb{P}^3)^*$ visto che

$$P=\begin{cases} x_0-x_3=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \Lambda_1(P):\lambda(x_0-x_3)+\mu x_1+\nu x_2=0$$

con $[\lambda,\mu,\nu]\in\mathbb{P}^2$

Pertanto è il piano

$$\begin{cases} a_0=\lambda \\ a_1=\mu \\ a_2=\nu \\ a_3=-\lambda \end{cases} \Rightarrow a_0=-a_3 \quad \text{cioè} \quad \boxed{a_0+a_3=0} \quad P^\vee$$

Ovviamente visto che in $\mathbb{P}^3$ $P\in r=\mathcal{L}(P,Q)$

$\Rightarrow$ $r^\vee \subset P^\vee$ in $\mathbb{P}^{3\vee}$

$r^\vee$: retta corr. a $\Lambda_1(r)$ in $\mathbb{P}^3$

$P^\vee$: piano corrisp. a $\Lambda_1(P)$ in $\mathbb{P}^3$

(iii) Visto che $H \notin r$ perché non ne soddisfa le eq. cartesiane $\Rightarrow$ $\exists$ un unico piano $\pi_H \in \Lambda_1(r)$ e passante per H

Esso si ottiene imponendo al fascio $\Lambda_1(r)$ il passaggio per H cioè

$$\lambda \cdot 0 + (\lambda + \mu) \cdot 1 + 2(\lambda - \mu) = 0 \iff$$

$$\lambda + \mu + 2\lambda - 2\mu = 0 \iff 3\lambda - \mu = 0$$

$\iff$ $\mu = 3\lambda$ cioè

$$\lambda x_0 + 4\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3 = 0$$

$$\boxed{x_0 + 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0}$$