

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

I Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si e' autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME NOME:

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ munito di prodotto scalare standard $\cdot$ e di base canonica $\mathcal{E}$ ortonormale. Si consideri $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ il vettore colonna delle coordinate indotte sullo spazio $\mathbb{R}^3$ dalla base $\mathcal{E}$ e siano U e W i sottospazi vettoriali definiti, rispettivamente, dalle seguenti equazioni cartesiane:

$$U : x_1 - x_3 = 0 \quad \text{e} \quad W : x_1 + x_3 = 0.$$

Si considerino i due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$:

- Π_U := proiezione ortogonale sul sottospazio vettoriale U , e
- S_W := simmetria (o riflessione) rispetto al sottospazio vettoriale W .

Si consideri l'endomorfismo composto

$$\varphi := S_W \circ \Pi_U \in \text{End}(\mathbb{R}^3).$$

- (i) Determinare il rango di φ e la matrice $A := M_{\mathcal{E}}(\varphi)$ rappresentativa dell'endomorfismo φ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.
- (ii) Dopo aver giustificato che A induce una forma bilineare simmetrica

$$b := b_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

determinare il rango di b , la dimensione del radicale di b (i.e. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)^{\perp_b}$), la segnatura di b e scrivere in opportune coordinate (z_1, z_2, z_3) la forma canonica di Sylvester di b .

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ il piano euclideo reale, munito di un riferimento cartesiano $RC(O, \underline{i}, \underline{j})$ che fornisce coordinate $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Siano dati i punti $A, B \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ che, rispetto al riferimento cartesiano fissato, hanno coordinate

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Trovare l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per il punto A e tangente in B ad una retta r di vettore direttore $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

(ii) Data la retta

$$\ell : x + 2y - 9 = 0,$$

verificare che ℓ e' una retta esterna alla circonferenza $\mathcal{C}$, i.e. $\ell \cap \mathcal{C} = \emptyset$, e determinare equazione cartesiana del luogo geometrico ottenuto riflettendo $\mathcal{C}$ rispetto alla retta ℓ .

Esercizio 3. Nel piano euclideo complessificato $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = RC(O; \mathcal{E})$ cartesiano reale che fornisce coordinate $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ su $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$. Sia dato il punto P che, rispetto al riferimento cartesiano dato, ha coordinate

$$P = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix},$$

dove $i \in \mathbb{C}$ unita' immaginaria.

- (i) Determinare equazione cartesiana del fascio proprio $\mathcal{F}$ di rette di centro P e, dopo aver verificato che nel fascio $\mathcal{F}$ esiste un'unica retta reale r , determinare equazioni parametriche reali ed equazione cartesiana reale della retta r .
- (ii) Determinare quante rette isotrope di $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^2$ passano per il punto P e scrivere le equazioni cartesiane delle rette isotrope per P specificando se a coppie risultino essere rette complesse e coniugate.

Esercizio 1

$(\mathbb{R}^3, \cdot)$ euclideo con prodotto scalare standard e base canonica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormale

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ coordinate

$$U: x_1 - x_3 = 0$$

$$W: x_1 + x_3 = 0$$

Siamo

$$\pi_U \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$$

$\pi_U =$ proiezione ortogonale sul sottospazio U

$$S_W \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$$

$S_W =$ riflessione rispetto al sottosp. vettoriale W

Poniamo

$$\varphi = S_W \circ \pi_U \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$$

(i) Trovare la matrice rappresentativa $A = M_E(\varphi)$ di φ in base canonica E

(ii) Dopo aver verificato che A induce una forma bilineare simmetrica b_A su $\mathbb{R}^3$, determinare

$\text{rg}(b_A)$, segnatura di b_A , dimensione del radicale

$(\mathbb{R}^3)^{\perp_{b_A}}$ e scrivere la forma canonica di Sylvester di b_A in opportune coordinate.

Svolgimento (i) Notiamo che $\dim(\text{Im } \pi_U) = \dim(U) = 2$ mentre $S_W \in \text{Aut}(\mathbb{R}^3)$
 $\Rightarrow \text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im } \varphi) = \dim(\text{Im}(S_W(U))) = 2$

Notiamo che $U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{U} = \left\{ \underline{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \underline{p}_2 = \underline{e}_2 \right\}$

base ortonormale di U

$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \mathcal{W} = \left\{ \underline{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \underline{p}_2 = \underline{e}_2 \right\}$ base orton. di W

(1) Per definizione

(2)

$$\begin{aligned}\pi_U(\underline{e}_1) &= \pi_{\underline{f}_1}(\underline{e}_1) + \pi_{\underline{f}_2}(\underline{e}_1) = \left(\underline{f}_1 \cdot \underline{e}_1\right) \underline{f}_1 + \left(\underline{f}_2 \cdot \underline{e}_1\right) \underline{f}_2 \stackrel{\underline{f}_2 \cdot \underline{e}_1 = 0}{=} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{f}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\pi_U(\underline{e}_2) = \pi_{\underline{f}_1}(\underline{e}_2) + \pi_{\underline{f}_2}(\underline{e}_2) \stackrel{\underline{f}_1 \cdot \underline{e}_2 = 0}{=} \left(\underline{f}_2 \cdot \underline{e}_2\right) \underline{f}_2 = 1 \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\pi_U(\underline{e}_3) &= \pi_{\underline{f}_1}(\underline{e}_3) + \pi_{\underline{f}_2}(\underline{e}_3) = \left(\underline{f}_1 \cdot \underline{e}_3\right) \underline{f}_1 + \left(\underline{f}_2 \cdot \underline{e}_3\right) \underline{f}_2 \stackrel{\underline{f}_2 \cdot \underline{e}_3 = 0}{=} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow M_E(\pi_U) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ora notiamo che W è piano ortogonale ad $U \Rightarrow$

$S_W|_U =$ riflessione su U rispetto alla retta $W \cap U$

$$\text{Ma } W \cap U: \begin{cases} x-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{cioè } W \cap U = \text{span}\{\underline{e}_2\} = \text{span}\{\underline{f}_2\}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi(\underline{e}_1) &= (S_W \circ \pi_U)(\underline{e}_1) = S_W(\pi_U(\underline{e}_1)) = S_W\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{f}_1\right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} S_W(\underline{f}_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\underline{f}_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\varphi(\underline{e}_2) = S_W(\pi_U(\underline{e}_2)) = S_W(\underline{e}_2) = \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\underline{e}_3) = S_W(\pi_U(\underline{e}_3)) = S_W\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{f}_1\right) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ come prima}$$

$$\Rightarrow M_E(\varphi) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = A$$

$$(2) A \in \text{Sym}(3 \times 3; \mathbb{R}) \Rightarrow b_A \in \text{Sym}(\mathbb{R}^3)$$

$$b_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t A \underline{y}$$

$$\text{Poiché } \text{rg}(A) = 2 \Rightarrow \text{rg}(b_A) = 2 \text{ e}$$

$$\dim((\mathbb{R}^3)^{\perp b_A}) = \dim(\ker(A)) = 3 - 2 = 1$$

In base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\} = \mathcal{F}$ si ha

(3)

$$M_{\mathcal{F}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

infatti

$$\varphi(\underline{f}_1) = -\underline{f}_1$$

$$\varphi(\underline{f}_2) = \underline{f}_2$$

$$\varphi(\underline{f}_3) = 0$$

$$\text{perch\u00e9 } \underline{f}_3 \in W \text{ e } \pi_U(\underline{f}_3) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{f}_3 \in \ker(S_W \circ \pi_U) = \ker(\varphi)$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(b_A) = (-1, 1)$$

Una base di Sylvester \(\bar{\mathcal{F}} := \{\underline{f}_2, \underline{f}_1, \underline{f}_3\}\)

ove $b_A(x, x)$ assume la forma canonica

$$z_1^2 - z_2^2.$$

Esercizio 2

(4)

$\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ con RC $(0, 1, 1)$ e coordinate (x, y)

Sia mo

$$A = (1, 1), B = (2, -1) \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$$

(i) Trovare equazione ^{cartesiana} circonferenza $\mathcal{C}$ per $A = (1, 1)$
e tangente in B alla retta r di vettore direttore
 $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

(ii) Sia data $l: x + 2y - 9 = 0$

dopo aver verificato che l è retta esterna a $\mathcal{C}$,
determinare equazione cartesiana del luogo
geometrico ottenuto riflettendo $\mathcal{C}$ rispetto a l

Svolgimento

Retta per B di vettore $\underline{v}_r$: $\det \begin{pmatrix} x-2 & y+1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} = 0$

$$-7x + 14 - y - 1 = 0$$

cioè $\boxed{r: 7x + y - 13 = 0}$

Punto medio di $\overline{AB}$: $M_{\overline{AB}}$ e t.c. $\overrightarrow{M_{\overline{AB}}A} = -\overrightarrow{M_{\overline{AB}}B}$

cioè $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{1-1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$

Il centro C di $\mathcal{C}$ sarà intersezione delle rette

$s :=$ retta per B e perpendicolare a r

$l :=$ retta per $M_{\overline{AB}}$ e perpendicolare alla corda $\overline{AB}$ di $\mathcal{C}$

Notiamo che

$$\underline{m}_r = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$s: \begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\underline{v}_{\overline{AB}} = B - A = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{m}_{\overline{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per ciò retta per M_{AB} con vett. direttore $M_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (5)

$$\det \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x - 2y - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{cioè} \quad \boxed{r: 2x - 4y - 3 = 0}$$

$$\text{Sn } r \quad \begin{cases} 2x - 4y - 3 = 0 \\ x = 2 + 7t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$2(2 + 7t) - 4(-1 + t) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$4 + 14t + 4 - 4t - 3 = 0 \quad 5 = 10t \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{t = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}}$$

$$\text{cioè } C = \left(2 + 7\left(-\frac{1}{2}\right), -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = \left(2 - \frac{7}{2}, -\frac{3}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Centro C di $\mathcal{C}$: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$R =$ raggio di $\mathcal{C} = d(C, B) = d(C, r)$ perché r tangente in B a $\mathcal{C}$

$$d(C, r) = \frac{\left| 7\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) - 13 \right|}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{\left| -\frac{21}{2} - \frac{3}{2} - 13 \right|}{\sqrt{50}} =$$

$$= \frac{\left| -\frac{24}{2} - 13 \right|}{\sqrt{50}} = \frac{\left| -12 - 13 \right|}{5\sqrt{2}} = \frac{25}{5\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\mathcal{C}: \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}}$$

$$(iv) \quad d(C, l) = \frac{\left| -\frac{3}{2} + 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 9 \right|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{\left| -\frac{9}{2} - 9 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{27}{2\sqrt{5}} = \frac{27\sqrt{5}}{10}$$

Notiamo che $\frac{27\sqrt{5}}{10} > \frac{5\sqrt{2}}{2}$ visto che

$$54\sqrt{5} > 50\sqrt{2}$$

Guinon

(6)

$$d(C, l) > R \Rightarrow l \text{ è esterna a } C$$

Poiché la riflessione rispetto ad l è una isometria

$\Rightarrow S_l(C)$ sarà una circonferenza dello

stesso raggio $R = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Sarà sufficiente trovare il riflesso di C rispetto alla retta l

Retta per C e perpendicolare a l

$$h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h \cap l: \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -\frac{3}{2} + 2t \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (-\frac{3}{2} + t) + 2(-\frac{3}{2} + 2t) - 9 &= 0 \\ t + 4t &= 9 + \frac{3}{2} + \frac{6}{2} \\ 5t_0 &= \frac{27}{2} = \frac{27}{2} \\ t_0 &= \frac{27}{10} \end{aligned}$$

Il punto riflesso corrisponde a $2t_0 = \frac{27}{5}$

$$\begin{aligned} \text{cioè } S_l(C) &= \left(-\frac{3}{2} + \frac{27}{5}, -\frac{3}{2} + \frac{2 \cdot 27}{5} \right) \\ &= \left(\frac{-15 + 54}{10}, \frac{-15 + 108}{10} \right) = \left(\frac{39}{10}, \frac{93}{10} \right) \end{aligned}$$

$$S_l(C): \left(x - \frac{39}{10} \right)^2 + \left(y - \frac{93}{10} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

Esercizio 3

(7)

Sia $A^2_{\mathbb{C}}$ piano affine complessificato e sia

R un riferimento affine reale $R = RA = (0, e_1, e_2)$

Sia

$$P = (1+i, i)$$

rispetto a R

(i) Determinare l'equazione del fascio di rette di centro P , verificando che in tale fascio esiste un'unica retta reale r , e trovando eq. param. reali per r ed eq. cartesiane reali per r .

(ii) Quante rette isotrope per P ? e trovare eq. cartesiane delle rette isotrope per P , stabilendo se a coppie vengono coniugate

Svolgimento

$$P = \begin{cases} x = 1+i \\ y = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (1+i) = 0 \\ y - i = 0 \end{cases}$$

(i) Pertanto $\mathcal{F} \in$

$$\lambda(x - 1 - i) + \mu(y - i) = 0$$

$$\lambda x + \mu y - (\lambda + i\lambda + i\mu) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Ora una retta $\bar{e}$ reale $\Leftrightarrow r = \bar{r}$

Se r deve appartenere a $\mathcal{F} \Rightarrow$ passa per P

Inoltre, essendo reale, passa per $\bar{P} = (1-i, -i)$

Pertanto il passaggio per $\bar{P}$ impone una condizione al fascio $\mathcal{F}$:

$$\lambda(1-i) + \mu(-i) - (\lambda + i\lambda + i\mu) = 0$$

$$\cancel{\lambda} - i\lambda - i\mu - \cancel{\lambda} - i\lambda - i\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2i\lambda - 2i\mu = 0$$

$$-\lambda + (\lambda + \mu) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -\mu}$$

(8)

Sostituendo in $\mathcal{L}$ si ottiene

$$-\mu x + \mu y - (-\mu + i(-\mu + \mu)) = 0$$

$$-\mu x + \mu y + \mu = 0$$

cioè $r: x - y - 1 = 0$

che è reale perché ha un'equazione reale nel riferimento reale R ed è univocamente determinata.

L'equazione cartesiana reale è stata già determinata

Per equazioni parametriche reali necessita di un punto reale su r e di $\underline{v}_r$ reale

Un punto reale è $M = (1, 0) = M_{\overline{P}\overline{P}}$ Punto medio del segmento $\overline{P}\overline{P}$
 un vettore direttore reale è $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \overrightarrow{\overline{P}\overline{P}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \end{cases} \quad \text{sono equazioni parametriche reali, } t \in \mathbb{C} \text{ parametro}$$

(ii) Le direzioni isotrope sono due in $\mathbb{C}^2$ e cioè:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Perciò le rette isotrope per $\overline{P}$ sono:

$$r_1: i(x-1-i) - 1(y-i) = 0 \quad \text{cioè}$$

$$ix - i + 1 - y + i = 0$$

$$\boxed{ix - y + 1 = 0}$$

$$r_2: i(x-1-i) + (y-i) = 0 \quad \text{cioè}$$

$$ix - i + 1 + y - i = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{ix + y + 1 - 2i = 0}$$

che non possono essere coniugate, altrimenti il pto di intersez. sarebbe reale.