Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

III Appello - Settembre 2023

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$, sia fissato un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = RC(O, x, y, z)$ ortonormale. Siano dati il piano

$$\pi : \; 2x - y = 0$$

e le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x & = & 0 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

(i) Stabilire se r e s sono rette sghembe ed, in caso di risposta affermativa, calcolare la distanza $d(r, s)$ tra le due rette.

(ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta ℓ incidente la retta r, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta s.

(iii) Determinare equazioni cartesiane di tutte le circonferenze $\mathcal{C}$ tangenti alla retta r nel punto origine O, aventi centro C sul piano π e raggio $R = 2$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo reale $V = \mathbb{R}^3$, munito di prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ standard e base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Sia $\mathcal{E}^*$ la base duale di $\mathcal{E}$ in $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$. Si considerino i seguenti vettori di V

$$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_3, \ \underline{v}_2 = \underline{e}_3, \ \underline{v}_3 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2.$$

(i) Stabilire se $\mathcal{V} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ costituisce una base per V ed, in caso di risposta affermativa, determinare la sua base duale $\mathcal{V}^* = \{\underline{v}_1^*, \underline{v}_2^*, \underline{v}_3^*\}$ esprimendo i funzionali lineari in $\mathcal{V}^*$ in combinazione lineare dei funzionali in $\mathcal{E}^*$.
(ii) Rappresentare ciascun $\underline{v}_i^* \in \mathcal{V}^*$, $1 \leq i \leq 3$, per mezzo del prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$; in altri termini, per ogni $\underline{v}_i^* \in \mathcal{V}^*$ determinare l'unico vettore $\underline{w}_i \in V$ (espresso in combinazione lineare dei vettori in $\mathcal{E}$) per cui si abbia $\underline{v}_i^* = \langle \underline{w}_i\ , -- \rangle$, $1 \leq i \leq 3$.
(iii) Determinare equazioni cartesiane (nelle coodinate (x, y, z) indotte da $\mathcal{E}$ su V) del sottospazio vettoriale $\mathrm{Ann}(\underline{v}_1^*) \subset V$.

Esercizio 3. Si consideri il piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P} := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ munito di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ e siano dati i punti

$$P_0 = [1,0,1],\ P_1 = [1,1,1],\ P_2 = [1,-2,0],\ P_3 = [0,1,1].$$

(i) Stabilire se i quattro punti dati sono in posizione generale in $\mathbb{P}$.

(ii) Determinare, se esistono, tutte le proiettivita' di $\mathbb{P}$ che mandano ordinatamente

$$P_0 \to U_0 = [1,0,0],\ P_1 \to U_1 = [0,1,0],\ P_2 \to U_2 = [0,0,1].$$

Determinare invece, se esistono, tutte le proiettivita' di $\mathbb{P}$ che abbiano come luogo di punti fissi esclusivamente l'insieme finito formato dai quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 dati.

(iii) Considerata la retta proiettiva $\mathcal{L}(P_0, P_1)$, congiungente i punti P_0 e P_1, determinare (se possibile) equazione cartesiana della retta affine $r := \mathcal{L}(P_0, P_1) \cap \mathcal{A}_0$ traccia di $\mathcal{L}(P_0, P_1)$ nella carta affine $\mathcal{A}_0 \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, con $\mathcal{A}_0$ munito di riferimento affine $RA(O; x, y)$ individuato dall'inclusione naturale $(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$ di $\mathcal{A}_0$ in $\mathbb{P}$.

Svolgimento III Appello Geometria 2
Settembre 2023

Esercizio 1

$\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$

$$\pi: \; 2x - y = 0$$

$$r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

(a) r e s sghembe? se sì $d(r,s)$

(b) Retta l incidente r, contenuta in π e perp. ad s

(c) Circonferenze tangenti a r in $O = (0,0,0)$, aventi centro su π, e raggio $R = 2$

Svolgimento

(a) r e s giacciono su 2 piani strettamente paralleli $z = 0$ e $z = 1$

$\Rightarrow r \cap s = \emptyset$

Inoltre

$$\underline{v}_r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_s: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vettori direttori non prop.

$\Rightarrow$ r e s non parallele $\Rightarrow$ r e s sghembe

Per calcolare $d(r,s)$ prendo:

fascio di piani di asse r: $\lambda x - 2\lambda y + \mu z = 0, \; [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$

α unico piano del fascio $/\!/$ a s: $\Leftrightarrow \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \alpha: z = 0$

$P = (0, 0, 1) \in s$

$$d(r,s) = d(P, \alpha) = \frac{|1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 1$$

(b) Se l contenuta in π ed incidente r $\Rightarrow$ punto di incidenza deve essere $r \cap \pi$ (visto che $r \not\subset \pi$)

$$P = r \cap \pi = l \cap r \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P = O = (0,0,0)$$

Pertanto la retta l passa per $O = (0,0,0) = l \cap r$

Consideriamo il piano β, passante per O e perpendicolare alla retta s:

$$0 \cdot x + 1y + 0z = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0 : \beta}$$

$$\Rightarrow l = \pi \cap \beta = \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow l : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

(c) I centri C devono stare su π ma anche su piano γ passante per O e perp. a r cioè

$$\gamma : \ 2x + y = 0$$

$\Rightarrow$ i centri sono sulla retta $\pi \cap \gamma : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ cioè

$$\pi \cap \gamma = \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pertanto i centri sono della forma $C = (0,0,c)$

Visto che $R = 2 = d(C, O) \Rightarrow c = \pm 2$ cioè i centri

sono $C_1 = (0,0,2)$ e $C_2 = (0,0,-2)$

Pertanto si ottengono le sfere

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$$

Le circonferenze cercate sono le intersezioni di queste sfere con i piani passanti per r e per C_i

<u>Fascio di piani di asse r:</u> $\lambda(x - 2y) + \mu z = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Passaggio per } C_1 : & 2\mu = 0 \\ \quad " \qquad\quad " \quad C_2 : & -2\mu = 0 \end{array}\right\} \to \text{è unico piano } x - 2y = 0$$

Dunque $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} S_1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} S_2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

Esercizio 2

$V = \mathbb{R}^3, \langle , \rangle$, $\mathcal{E} = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$, $\mathcal{E}^* = \{ \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^* \}$

(a) $\underline{v}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_3$ $\quad \underline{v}_2 = \underline{e}_3$, $\underline{v}_3 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$

base $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ determinare $\mathcal{V}^*$ scrivendo

$\underline{v}_i^*$ come comb. lineare della base $\mathcal{E}^*$

(b) Rappresentare $\underline{v}_i^*$ per mezzo di $\langle , \rangle$

(c) Trovare eq. cartesiane di $\mathrm{Ann}(\underline{v}_1^*) \subset V$

Svolg.

(a)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{V} = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \}$ costituiscono base per V

$\mathcal{V}^* := \{ \underline{v}_1^*, \underline{v}_2^*, \underline{v}_3^* \}$ è t.c. $\underline{v}_i^*(\underline{v}_j) = \delta_{ij}$

$\underline{v}_1^* = \alpha_1 \underline{e}_1^* + \alpha_2 \underline{e}_2^* + \alpha_3 \underline{e}_3^*$ è t.c.

- $$\begin{cases} 1 = \underline{v}_1^*(\underline{v}_1) = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 = \underline{v}_1^*(\underline{v}_2) = \alpha_3 \\ 0 = \underline{v}_1^*(\underline{v}_3) = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_3 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{v}_1^* = \underline{e}_1^* + \underline{e}_2^*}$$

- $$\begin{cases} 0 = \underline{v}_2^*(\underline{v}_1) = \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 1 = \underline{v}_2^*(\underline{v}_2) = \alpha_3 \\ 0 = \underline{v}_2^*(\underline{v}_3) = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{v}_2^* = -\underline{e}_1^* - \underline{e}_2^* + \underline{e}_3^*}$$

- $$\begin{cases} 0 = \underline{v}_3^*(\underline{v}_1) = \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 = \underline{v}_3^*(\underline{v}_2) = \alpha_3 \\ 1 = \underline{v}_3^*(\underline{v}_3) = \alpha_1 - \alpha_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 \\ 0 = \alpha_3 \\ 1 = -\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{v}_3^* = -\underline{e}_2^*}$$

(b) Poiché $\underline{e}_i^* = \langle \underline{e}_i, - \rangle$ perché $\mathcal{E}$ ortonormale

$\Rightarrow$ $\underline{v}_1^* = \langle \underline{w}_1, - \rangle$ con $\underline{w}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2$

$\underline{v}_2^* = \langle \underline{w}_2, - \rangle$ con $\underline{w}_2 = -\underline{e}_1 - \underline{e}_2 + \underline{e}_3$

$\underline{v}_3^* = \langle \underline{w}_3, - \rangle$ con $\underline{w}_3 = -\underline{e}_2$

(c) Visto che

$$\underline{v}_1^* = \langle \underline{w}_1, - \rangle$$

trovare $Ann(\underline{v}_1^*)$ è equivalente a trovare

$Span\{\underline{w}_1\}^\perp \subset V = \mathbb{R}^3$ cioè

$$\boxed{x + y = 0}$$

Esercizio 3

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$P_0 = [1,0,1]$, $P_1 = [1,1,1]$, $P_2 = [1,-2,0]$, $P_3 = [0,1,1]$

(a) In posizione generale?

(b) Tutte le proiettività che mandano

$P_0 \to U_0 = [1,0,0]$

$P_1 \to U_1 = [0,1,0]$

$P_2 \to U_2 = [0,0,1]$

e tutte le proiettività che hanno come luogo punti fissi $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$

(c) Eq. cartesiane della retta affine traccia in A_0 di $\mathcal{L}(P_0, P_1)$

(a) $P_0 = [\underline{v}_0]$ $P_1 = [\underline{v}_1]$ $P_2 = [\underline{v}_2]$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \text{ inoltre se } P_3 = [\underline{v}_3]$$

$$\Rightarrow \underline{v}_3 = 2\underline{v}_0 - \underline{v}_1 - \underline{v}_2$$

tutti i coeff. della comb. lineare diversi da 0 $\Rightarrow$ quattro punti in pos. gen.

(b) $\exists$ infinite proiettività t.c. $P_i \to U_i$, $i = 0,1,2$

Infatti le proiettività inverse sono date da

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & \mu & -2\nu \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix} \quad t.c. \ \lambda \cdot \mu \cdot \nu \neq 0$$

è suff. considerare le matrici $A^* = Cof(A)^t$.

Invece $\nexists$ proiettività per cui luogo fisso solo i 4 punti, perchè $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ in pos. generale e, per thm. fond. proiettività

$$f(P_i) = P_i \quad i = 0, \dots, 3 \iff f = \cdot \, Id_{\mathbb{P}^2}$$

ma $Id_{\mathbb{P}^2}$ ha tutto $\mathbb{P}^2$ come luogo fisso puntualmente

(c) $\mathcal{L}(P_0, P_1)$: $\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$x_1 + x_2 - (x_0 + x_1) = 0 \implies x_2 - x_0 = 0$$

$$\implies r := \mathcal{L}(P_0, P_1) \cap A_0 : \; y = 1$$