Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

II Appello - Luglio 2023

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio euclideo complessificato $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = RC(O, x, y, z)$ ortonormale reale. Sia data la retta r che, nel riferimento $\mathcal{R}$, ha equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} (1+i)x + 2y - (1-i)z - 1 &= 0 \\ 2ix + (1+i)y - 1 &= 0 \end{cases} .$$

(i) Stabilire se r e' una retta di I specie e se r contiene punti reali;

(ii) Determinare l'equazione cartesiana di ciascun piano reale α passante per la retta r.

(iii) Dopo aver verificato che $P = (1, 0, 1) \in \alpha$, per ogni piano reale α trovato al punto (ii), determinare equazioni parametriche delle rette isotrope contenute in α e passanti per P.

Esercizio 2. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine reale, con un riferimento $RA(O; x, y)$. Si consideri il completamento proiettivo di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dato dall'inclusione naturale $(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$ e siano $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P} := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(i) Determinare il punto improprio r_∞ della retta affine r, di equazione cartesiana

$$5x - 7y + 12 = 0$$

e dedurre l'equazione del fascio $\mathcal{F}$ di rette proiettive individuato dal fascio improprio di rette affini (parallele) generato in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dalla retta r.
(ii) Trovare equazione cartesiana, nelle coordinate plueckeriane $[a_0, a_1, a_2]$ del piano proiettivo duale $\mathbb{P}^*$, del sottospazio proiettivo $\mathcal{F}^\vee := \delta^{-1}(\mathcal{F})$, dove $\delta : \mathbb{P}^* \to \{\text{rette di}\}\ \mathbb{P}$.
(iii) Determinare le coordinate omogenee del punto $Q \in \mathbb{P}$ proiezione del punto $H := [1,\ 1,\ 2]$ dal punto r_∞ sulla retta proiettiva $x_2 = 0$.

Esercizio 3. Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ sia fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O; x, y)$. Sia data la famiglia di coniche euclidee

$$\mathcal{C}_t : x^2 + 2txy + y^2 + t = 0,$$

dove $t \in \mathbb{R}$ un parametro.

(i) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_t$ e' non–degenere.

(ii) Stabilire per quali valori di t la conica $\mathcal{C}_t$ e' un'iperbole generale.

(ii) Stabilire per quali valori di t la conica $\mathcal{C}_t$ e' un'ellisse non-degenere a punti reali.

Esercizio 1

(i) La retta coniugata $\bar{r}$ ha eq. cartesiane

$$\bar{r}: \begin{cases} (1-i)x + 2y - (1+i)z) - 1 = 0 \\ -2ix + (1-i)y - 1 = 0 \end{cases}$$

Consideriamo

$$rg\begin{pmatrix} r \\ \bar{r} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1+i & 2 & -1+i & -1 \\ 2i & 1+i & 0 & -1 \\ 1-i & 2 & -1-i & -1 \\ -2i & 1-i & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 3$$

infatti $R_4 = R_1 + R_2 - R_3$

$\Rightarrow$ r e $\bar{r}$ sono complanari & dunque r è di I specie

I parametri direttori di r sono dati dalle soluzioni di

$$\begin{cases} (1+i)x + 2y - (1-i)z = 0 \\ 2ix + (1+i)y = 0 \end{cases}$$

cioè $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -i-1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v}_{\bar{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i-1 \\ i \end{pmatrix}$

Visto che $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_{\bar{r}}$ non proporzionali $\Rightarrow$ r e $\bar{r}$ non parallele

Poiché complanari $\Rightarrow$ sono incidenti in un punto $Q = r \cap \bar{r}$ che è necessariamente reale

Quindi r contiene un unico punto reale.

(ii) Ogni piano reale per r deve contenere pure $\bar{r}$ (proprio perché un piano reale avrà equazione reale)

Pertanto $\exists!$ α piano reale che è il piano passante per $Q = r \cap \bar{r}$ e con giacitura

$$\mathrm{Span}\{\underline{v}_r, \underline{v}_{\bar{r}}\} = \mathrm{Span}\left\{ \tfrac{1}{2}(\underline{v}_r + \underline{v}_{\bar{r}}), -\tfrac{i}{2}(\underline{v}_r - \underline{v}_{\bar{r}}) \right\}$$

$$\alpha: x + y - z = 0$$

(iii) Le direzioni isotrope su α sono date dagli $(l, m, n) \neq (0,0,0)$ t.c.

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases}$$

Visto che $n = l + m$, esso si riduce a

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + (l+m)^2 = 0 \\ n = l + m \end{cases}$$

cioè
$$\begin{cases} 2l^2 + 2m^2 + 2lm = 0 \\ n = l + m \end{cases}$$

Visto che $l, m \neq 0$ (altrimenti si avrebbe $(0,0,0)$ unica sol.)

Poniamo $m = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2l^2 + 2l + 2 = 1 \\ n = l + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ n = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Pertanto le due direzioni isotrope sono

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 - i\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Le due rette isotrope per P sono

$$l_i : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\underline{v}_i \quad , \; t \in \mathbb{C} \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Esercizio 2

(i) r_∞ è ottenuto da

$$\begin{cases} 5X_1 - 7X_2 + 12X_0 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

cioè $r_\infty = [0, 7, 5]$

Il fascio $\mathcal{F}$ è $\Lambda_1(r_\infty)$ che è

$$\lambda(X_0) + \mu(7X_2 - 5X_1) = 0$$

cioè

$$\lambda X_0 - 5\mu X_1 + 7\mu X_2 = 0$$

(ii) $\mathcal{F}^\vee = \delta^{-1}(\mathcal{F})$ è la retta proiettiva congiungente

$[1, 0, 0] = \alpha^\vee$ dove $\alpha: X_0 = 0$ in $\mathbb{P}^2$

$[12, 5, -7] = \beta^\vee$ dove $\beta: 12X_0 + 5X_1 - 7X_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2$

Perciò $\mathcal{F}^\vee$

$$\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{+7a_1 + 5a_2 = 0}$$

(iii) La proiezione di $H = [1, 1, 2]$ su $X_2 = 0$ da r_∞ è la stessa in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ che si ottiene prendendo la retta per $H = (1, 2) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ con vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

ed intersecando con $y = 0$, cioè

$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 2 + 5t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$x = 1 + 7\left(-\frac{2}{5}\right) = 1 - \frac{14}{5} = -\frac{9}{5} \Rightarrow Q = \left(-\frac{9}{5}, 0\right)$$

$$\Rightarrow Q = [5, -9, 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

Esercizio 5

(i) $\tilde{A}_t = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}$

$\det(\tilde{A}_t) = t - t^3 = t(1-t^2)$

Perciò $\det(\tilde{A}_t) = 0 \iff t = 0 \vee t = \pm 1$

Pertanto $\mathcal{C}_t$ non degenere $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

(ii) Notiamo che

$\det(A_0) = 1 - t^2$

Dunque $1 - t^2 < 0 \iff t < -1$ e $t > 1$

(iii) Viceversa

$\det(A_0) = 1 - t^2 > 0 \iff -1 < t < 1$

però per essere non degenere, $t \neq 0$ dal punto (i)

Quindi se

$-1 < t < 0$ e $0 < t < 1$

$\mathcal{C}_t$ è un'ellisse

Per capire quando è a punti reali notiamo che

$P_{A_0}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + (1 - t^2)$

$(1 - t^2) > 0$ per $-1 < t < 0$
e $0 < t < 1$

Dunque le due radici di $P_{A_0}(\lambda)$ sono entrambe positive. Siano esse λ_1, λ_2

Visto che $\mathcal{C}_t$ non ha parte lineare, per conseguenza dal Teorema spettrale, $\exists\, M \in O(2, \mathbb{R})$ t.c.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ e $\mathcal{C}_t$ diventa

$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + t = 0$

cioè

$$\frac{(x')^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(y')^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = -t$$

con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Dunque

$$\frac{(x')^2}{\frac{1}{-t\lambda_1}} + \frac{(y')^2}{\frac{1}{-t\lambda_2}} = 1$$

che è f. c. n. di un'ellisse generale a punti reali se e solo se $-t > 0$ cioè $t < 0$

Dunque $\mathcal{C}_t$ è ellisse generale a punti reali per $-1 < t < 0$