

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2022/2023
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

I Appello - Giugno 2023

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME:

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al più 4. Sia U il sottospazio di V definito da:

$$U := \{p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0\}.$$

- (i) Determinare una base di U , la dimensione di U e la dimensione dello spazio vettoriale quoziente V/U . Stabilire inoltre se può esistere un'applicazione lineare $\varphi : V/U \rightarrow \mathbb{R}^3$ che sia suriettiva.
- (ii) Stabilire se i polinomi $x \in V$ e $x^3 \in V$ sono rappresentanti della medesima classe laterale nello spazio vettoriale quoziente V/U ;
- (iii) Stabilire se in V/U il sistema di vettori $\{[x], [x^2 + 2]\}$ può essere una base di V/U .

Esercizio 2. Nello spazio euclideo complessificato $\mathbb{E}_{\mathbb{C}}^3$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = RC(O, \mathcal{E})$ cartesiano reale che è ortonormale rispetto all'estensione $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ del prodotto scalare standard di $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$. Siano dati i vettori

$$\underline{v}_1 = (2i, -i, 1+i) \text{ e } \underline{v}_2 = (-2i, i, i+1).$$

- (i) Stabilire se i vettori dati sono $\mathbb{C}$ -linearmente indipendenti.
- (ii) Determinare equazione cartesiana del piano π , passante per il punto $P = (2, 0, 0)$ e parallelo al sottospazio vettoriale $\text{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, stabilendo inoltre se π è un piano reale.
- (iii) Determinare equazioni parametriche di tutte le rette isotrope di π passanti per il punto P .

Esercizio 3. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, con riferimento proiettivo canonico e relative coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, sia data la conica proiettiva C di equazione cartesiana

$$C : x_0^2 + x_0x_2 - x_1^2 - x_1x_2 = 0.$$

- (i) Classificare dal punto di vista proiettivo la conica C , determinando la sua forma canonica proiettiva reale in opportune coordinate omogenee $[z_0, z_1, z_2]$ per $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.
- (ii) Determinare le coordinate omogenee dei punti di intersezioni di C con la retta fondamentale $H_0 : x_0 = 0$ di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.
- (iii) Studiare le intersezioni della conica C con la retta $r : x_0 - x_1 = 0$ e le intersezioni della conica C con la retta $\ell : x_0 + x_1 + x_2 = 0$, deducendo le coordinate dei punti singolari di C .

Esercizio 1

(i) $\dim(V) = 5$ perché ha base canonica $\bar{e}$

$$\bar{e} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

Ora

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = P(x) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 7a_3 + 15a_4 = 0 \end{cases}$$

$$a_4 = t$$

$t, s, u \in \mathbb{R}$ parametri

$$a_3 = s$$

$$a_2 = u$$

$$\begin{cases} a_1 = -3u - 7s - 15t \\ a_0 = +3u + 7s + 15t - t - s - u = 2u + 6s + 14t \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) \in U \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$$

$$(2u + 6s + 14t) - (3u + 7s + 15t)x + ux^2 + sx^3 + tx^4$$

$$\Leftrightarrow \bar{P}(x) = u(2 - 3x + x^2) + s(6 - 7x + x^3) + t(14 - 15x + x^4)$$

$$\Rightarrow \text{una base di } U \text{ è } B_U = \{2 - 3x + x^2, 6 - 7x + x^3, 14 - 15x + x^4\}$$

$$\Rightarrow \dim(U) = 3 \Rightarrow \dim(V/U) = 2$$

In particolare non può esistere un'applicazione lineare suriettiva da V/U a $\mathbb{R}^3$.

(ii) In V/U si ha $[x] = [x^3] \Leftrightarrow$

$$x - x^3 \in U \quad \text{ma} \quad x - x^3 = x(1 - x^2)$$

ed il polinomio $x(1 - x^2) \notin U$ infatti non si annulla per $x = 2$

Per ciò $[x] \neq [x^3]$ in V/U

(iii) In V/U si ha

$$\alpha [x] + \beta [x^2 + 2] = [0]$$

$$\overset{||}{[\alpha x + \beta x^2 + 2\beta]}$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta x^2 + 2\beta \in U$$

$$\text{cioè } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1) + \beta(1) + 2\beta = 0 \\ \alpha(2) + \beta(4) + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 6\beta = 0 \end{cases}$$

ed il sistema ammette soluzioni
non banali

$$\begin{aligned} \alpha &= -3t \\ \beta &= t \end{aligned} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow [x], [x^2 + 2]$ sono dipendenti in V/U

(i) considero

$$\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & -i & 1+i \\ -2i & i & 1+i \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
 $\text{rg} = 2$

 $\Rightarrow$ sono $\mathbb{C}$ -lin. indipendenti

(ii) Prendiamo

$$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 4i \\ -2i \\ 0 \end{pmatrix} \sim 2i \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{C}$$

$$\underline{w}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2+2i \end{pmatrix} \sim (2+2i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Span} \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

 $\Rightarrow$ la giacitura di π è reale e $P \in \pi$ è reale $\Rightarrow \pi$ è piano reale e una sua eq. cartesiana reale è

$$\det \begin{pmatrix} (x_1-2) & x_2 & x_3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$-1(x_1-2) - 2x_2 = 0$$

cioè

$$\boxed{x_1 + 2x_2 - 2 = 0}$$

(iii) La giacitura di π è $\pi_0: x_1 + 2x_2 = 0$ Le olivazioni isotrope in π_0 sono date da

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ t.c.}$$

$$\begin{cases} l + 2m = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + m^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$m = \pm i\sqrt{5}m$$

Pertanto

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -i\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ +i\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

sono le 2 direz isotrope su π_P

Le rette isotrope di π per il punto P sono dunque

$$l_1: \begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -i\sqrt{5}t \end{cases}$$

$$l_2: \begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = i\sqrt{5}t \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{C}$$

(1) La matrice completa di C è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\det(A) = 0$ ma $\det \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{rg}(C) = 2 \Rightarrow C$ è conica semplicemente degenere

Dall'equazione cartesiana di C notiamo che

$$[1, 1, 0], [0, 0, 1] \in C$$

perciò non può essere puntiforme e dunque la sua f.c. proiettiva reale è

$$Z_0^2 - Z_1^2 = 0$$

(2) La retta fondamentale $x_0 = 0$ è secante C infatti

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_1 x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_1 + x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

che fornisce $P_1 = [0, 0, 1]$ e $P_2 = [0, 1, -1]$.

(3) $r: x_0 - x_1 = 0$ è la retta per $[1, 1, 0]$ e $[0, 0, 1]$

Quindi ha eq. parametriche $r: \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \end{cases}$

$$\Rightarrow r \cap C: \lambda^2 + \lambda\mu - \lambda^2 - \lambda\mu = 0 \quad \forall [\lambda, \mu] \Rightarrow r \subset C$$

$l: x_0 + x_1 + x_2 = 0$ è la retta per $[1, -1, 0]$ e $[0, 1, -1]$ cioè

$$\begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = -\lambda + \mu \\ x_2 = -\mu \end{cases}$$

Perciò

$$\ell \cap C: \lambda^2 + \lambda(-\mu) - (-\lambda + \mu)^2 - (-\lambda + \mu)(-\mu) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda\mu - (\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2) - \lambda\mu + \mu^2 = 0$$

$$\cancel{\lambda^2 - \lambda\mu - \lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2 - \lambda\mu + \mu^2} = 0$$

$$\forall [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Perciò anche $\ell \subset C$

Quindi C è riducibile in $\ell \cup \ell$

$$\text{e } \text{Sing}(C) = \ell \cap \ell = \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{cioè } \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ 2x_0 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sing}(C) = [1, 1, -2]$$