

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

VI Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Svolgere i quesiti proposti per preparazione al II esonero.
- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME:

Esercizio 1. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, siano dati i seguenti punti:

$$Q_0 = [-1, -2, 1], \quad Q_1 = [0, 1, 1], \quad Q_2 = [-4, -2, 10], \quad Q_3 = [2, -4, -10].$$

- (i) Stabilire se i quattro punti dati sono allineati in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.
- (ii) In caso di risposta affermativa al punto (i), determinare l'equazione cartesiana omogenea della retta

$$\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$$

in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

- (iii) Stabilire se puo' esistere una proiettivita' di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che mandi la coppia ordinata Q_0, Q_1 nella coppia ordinata F_0, F_1 , dove F_0 ed F_1 sono i punti fondamentali di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ nel riferimento $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$.

- (iv) Stabilire se puo' esistere una proiettivita' di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ che mandi la terna ordinata Q_0, Q_1, Q_2 nella terna ordinata F_0, F_1, F_2 , dove F_0, F_1 ed F_2 sono i punti fondamentali di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ nel riferimento $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$.

Esercizio 2. Con stesse ipotesi e notazioni come nell'**Esercizio 1**, sia $\ell \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la retta proiettiva $\ell = \mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, che e' isomorfa ad una retta proiettiva astratta $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Denotati con

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i vettori rappresentanti i punti $Q_0 = [\mathbf{v}_0]$ e $Q_1 = [\mathbf{v}_1]$ su ℓ , si consideri il riferimento proiettivo $f : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \ell$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ che ha come punti fondamentali $F_0 = [1, 0] = f^{-1}(Q_0)$, $F_1 = [0, 1] = f^{-1}(Q_1)$ e punto unita' $U = f^{-1}([\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1])$.

- (i) Determinare coordinate omogenee di $f^{-1}(Q_2)$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ rispetto al riferimento F_0, F_1, U di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.
- (ii) Determinare coordinate omogenee di $f^{-1}(Q_3)$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ rispetto al riferimento F_0, F_1, U di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Esercizio 3. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, si consideri la proiettività $f \in \text{PGL}(3, \mathbb{R})$ individuata dalla classe di proporzionalità della matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare l'unica retta ℓ , tra le tre rette fondamentali $H_0 : x_0 = 0$, $H_1 : x_1 = 0$ e $H_2 : x_2 = 0$ del riferimento di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, che risulta essere retta stabile per la proiettività f .
- (ii) Stabilire se la retta ℓ è retta di punti fissi per f .
- (iii) Determinare i punti fissi di f e stabilire se qualcuno di questi punti fissi è situato su ℓ .
- (iv) Denotato con $\Lambda_1(C)$ il fascio di rette di centro il punto $C = [1, -2, 0] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee, nelle coordinate duali $[a_0, a_1, a_2]$ di $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^*$, del sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^*$ corrispondente a $\Lambda_1(C)$.
- (v) Verificare che $f(\Lambda_1(C)) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e di nuovo un fascio di rette proiettive in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ e determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee, nelle coordinate duali $[a_0, a_1, a_2]$ di $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^*$, del sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^*$ corrispondente a $f(\Lambda_1(C)) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Esercizio 4. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, sia data la conica proiettiva Γ che, nelle coordinate omogenee date, ha equazione cartesiana omogenea

$$x_0^2 + x_0x_2 - x_1^2 - x_1x_2 = 0.$$

- (i) Determinare l'equazione matriciale della conica Γ .
- (ii) Classificare dal punto di vista proiettivo la conica Γ .
- (iii) Dedurre l'espressione della sua forma canonica proiettiva in opportune coordinate omogenee $[y_0, y_1, y_2]$.
- (iv) Stabilire se Γ e' una conica irriducibile e ridotta.
- (v) In caso di risposta negativa al punto (iv), determinare il luogo singolare di Γ e fornire equazioni cartesiane di $\text{Sing}(\Gamma)$.