ESERCIZI DI RIEPILOGO QUADRICHE (Geom. 4 a.a. 2022/2023)
PROF. F. FLAMINI

Esercizio 1 (II Appello, 15 Luglio 2019)

Sia data $Q_1 \subset \mathbb{E}^3$ la quadrica di equazione cartesiana

$$4xy + 4xz + 3y^2 - 2yz + 3z^2 - 3 = 0$$

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera

(a) Q_1 è un'iperboloide ad una falda

(b) Q_1 è un'iperboloide a due falde

(c) Q_1 è una superficie connessa

(d) Q_1 è una quadrica rotonda rispetto ad un asse

<u>svolgimento</u>

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrice di Gramm

per Laplace

$$\det(\tilde{A}) = -3 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \left[0 - 4 - 4 - (12 + 0 + 12) \right] =$$

$$= -3 \cdot [-16 - 24] > 0$$

$\Rightarrow rg(Q_2) = 4$ e $rg(A) = 3$ e $\det(\tilde{A}) > 0$

Q_2 a centro, generale,

$\mathcal{Q}(\underline{x}) = 4xy + 4xz + 3y^2 - 2yz$

si annulla e.g. in $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$

$\Rightarrow$ <u>Q_1 iperboloide iperbolico ∂ ad una falda</u> $\Rightarrow$ $\boxed{\text{(a) vera (b) falsa}}$

- Come visto a lezione, con lo studio delle f. c. m., ogni iperboloide iperbolico è CONNESSO $\Rightarrow$ (c) vera.
(Oss. Svolgendo il quesito (d) lo verificheremo inoltre nel caso specifico)

Notiamo che la matrice di Gram ha polinomio caratteristico

$$P_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 2 & 2 \\ 2 & 3-t & -1 \\ 2 & -1 & 3-t \end{pmatrix} =$$

$$= -t(3-t)^2 - 4 - 4 - [4(3-t) - t + 4(3-t)] =$$

$$= -t(3-t)^2 - 8 - 8(3-t) + t =$$

$$= -t(3-t)^2 - 8(3-t) + (t-8) = -(3-t)[t(3-t)+8] + (t-8)$$

$$= -(3-t)[3t - t^2 + 8] + (t-8) =$$

$$= -\cancel{9t} + 3t^2 - 24 + \cancel{3t^2} - \cancel{t^3} + \cancel{8t} + \cancel{t} - 8 =$$

$$= -t^3 + 6t^2 - 32$$

Notare che $P_A(-2) = 8 + 24 - 32 = 0 \Rightarrow$

	-1	6	0	-32
-2	$\downarrow$	2	-16	32
	-1	8	-16	0

$$\Rightarrow P_A(t) = (t+2)(-t^2+8t-16) = -(t+2)(t^2-8t+16)$$

$$= -(t+2)(t-4)^2 \;(! \Rightarrow) \quad \lambda_1 = -2 \text{ e } \lambda_2 = 4$$

con $m_a(-2) = 1$ e $m_a(4) = 2$

In una base di autovettori abbiamo coordinate

$\underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ t.c.

$$Q(\underline{z}) = 4z_1^2 + 4z_2^2 - 2z_3^2$$

In tali coordinate, Q_2 diventa

$$4z_1^2 + 4z_2^2 - 2z_3^2 - 3 = 0 \quad \left(\Rightarrow \underline{\text{non c'è bisogno di traslazioni}} \right)$$

Pertanto la f. c. m. è esattamente

$$\frac{4}{3}z_1^2 + \frac{4}{3}z_2^2 - \frac{2}{3}z_3^2 = 1$$

cioè

$$\boxed{\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} - \frac{z_3^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 1}$$

poiché $a = b \Rightarrow Q_2$ è rotonda attorno all'asse z_3

(d) è vera

Con questi conti ritroviamo un secondo modo di dimostrare che Q_2 è connesso.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} Q_2 \subset \mathbb{E}^3$$

$$(\theta, z_3) \longrightarrow \left(\sqrt{\frac{3+2z_3^2}{2}}\cos\theta, \sqrt{\frac{3+2z_3^2}{2}}\sin\theta, z_3\right)$$

perché φ continua, suriettiva su Q_2 e $\mathbb{R}^2$ connesso

infatti

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2\left(1+\frac{z_3^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}\right)} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2\left(1+\frac{z_3^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{1 + \frac{z_3^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}} \cos\theta = \sqrt{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\frac{3}{2}+z_3^2}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}}} \cos\theta = \sqrt{\frac{3+2z_3^2}{4}}\cos\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3+2z_3^2}}{2}\cos\theta$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3+2z_3^2}}{2}\sin\theta \Rightarrow \text{ritrovo (c) vera}$$

Esercizio 2 (Appello 14 febbraio 2020 mischiato con Appello 22 giugno 2021)

Siano date le quadriche

$$Q_1: \ 2xz + y^2 - 1 = 0 \quad e \quad Q_2: x^2 + 4xy + y^2 = 2z$$

Dire quali delle affermazioni sono vere

(a) Q_1 è un paraboloide iperbolico

(b) Q_1 è un iperboloide iperbolico

(c) Q_1 è un iperboloide ad una falda

(d) Q_1 è una superficie compatta

(e) Q_2 è un paraboloide iperbolico

(f) Q_2 contiene infinite rette

(g) Q_2 è una superficie connessa

(h) Q_2 è una superficie compatta

Svolgimento

Per Q_1

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(\tilde{A}) = 4 \quad det(\tilde{A}) = -1\,[-1] > 0 \quad rg(A_1) = 3$

e $Q_1(\underline{x}) = 2xz + y^2$ si annulla in e.g. $(x_0, y_0, z_0) =$
$= (0, 0, 1) \Rightarrow Q_1$ è iperboloide iperbolico

Pertanto:

(a) falsa

(b) vera

(c) vera perchè ad 1 falda sinonimo di iperboloide iperbolico

(d) falsa perchè Q_1 illimitato

Per Q_2

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(\tilde{A}_2) = 4$, $\det(\tilde{A}) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$
$= -1 \cdot (1-4) =$
$= -1 \cdot (-3) = 3 > 0$

$rg(A) = 2$

$\Rightarrow$ Q_2 è paraboloide a sella o iperbolico

(e) vera

(f) vera perchè è doppiamente rigato

(g) vera perchè Q_2 è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$

(h) falsa, sempre perchè Q_2 è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$

Infatti $P_A(t) = -(t-3) \cdot t\,(t+1)$
perciò in opportune coordinate Q_2 ha f.c.m.

$$3 z_1^2 - 1 z_2^2 = 2 z_3$$

cioè

$$\frac{3}{2} z_1^2 - \frac{1}{2} z_2^2 = z_3$$

cioè

$$\frac{z_1^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} - \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = z_3$$

pertanto

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} Q_2 \subset \mathbb{E}_3$$

$$(u, v) \longrightarrow \left(u, v, \frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)$$

è omeomorfismo.

Essendo Q_2 omeomorfa a $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ è connessa ma non compatta.

1

Esercizio 3 (V Appello 30 Gennaio 2023 mischiato con esercizio proposto)

Siano date le quadriche

$$Q_1: x^2+y^2-z^2+2x-2y-2z=0 \quad e \quad Q_2: x^2+2xy+y^2+x+z=1$$

Dire quali affermazioni sono vere

(a) Q_1 è iperboloide iperbolico

(b) Q_1 è iperboloide ellittico

(c) Q_1 è un cono

(d) Q_1 è una superficie non singolare e per ogni suo punto P il piano tangente $\tau_{Q_1,P}$ interseca Q_1 in due rette distinte

(e) Q_2 è una quadrica non singolare

(f) Q_2 è un cilindro con generatrici parallele alla direzione $\underline{v}=(1,1,1)$

(g) La forma canonica affine di Q_2 è, in opportune coordinate, $z_1^2-z_2^2=1$

(h) Determinare una direttrice di Q_2

Svolgimento

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rg(\tilde{A}_1)=4$

$rg(A_1)=3$

$det(\tilde{A}_1)>0$

$Q_1(x)=x^2+y^2-z^2$ si annulla in e.g. $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,+1)$

$\Rightarrow$ Q_1 è iperboloide iperbolico

((a) vera, (b) e (c) false)

Poiché Q_1 è iperboloide ad una falda $\Rightarrow$ Q_1 è sicuramente non singolare

Inoltre per ogni punto $P \in Q_1$, la sezione tangenziale $\tau_{Q_1,P} \cap Q_1$ è un'iperbole degenere formata da 2 rette incidenti in P in cui la I retta è della I schiera e la II è della seconda schiera $\Rightarrow$ (d) vera

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\tilde{A}_2) = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

però $\det \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - (0 - 1 + 1/4) = -1/4 \neq 0$

$\Rightarrow rg(\tilde{A}_2) = 3$

$$rg(A_2) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ Q_2 è un <u>cilindro parabolico</u>

$\Rightarrow$ in opportune coordinate di Sylvester la sua f.c.a. è $z_1^2 = z_2$ $\Rightarrow$ (g) è falsa

Siccome Q_2 è un cilindro $\Rightarrow$ Q_2 è non singolare

$\Rightarrow$ (e) è vera

Notiamo $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in Q_2$

Possiamo considerare $\tau_{Q_2, P}$

Se

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2 + x + z - 1 = 0$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x + 2y + 1 \\ 2y + 2y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tau_{Q_2, P} : 1(x-0) + 0(y-0) + 1(z-1) = 0$$

cioè $\tau_{Q_2,P} : x + z - 1 = 0$

La sezione $Q_2 \cap \tau_{Q_2, P}$: $\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + x + z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases}$$

cioè la sezione è una parabola doppiamente degenere o retta doppia

Il supporto è la retta

$$r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

che è una generatrice del cilindro e tutte le generatrici sono parallele a r che ha vettore direttore

$$\underline{v}_r : \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè } \underline{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (f) è falsa

Per determinare una direttrice di Q_2 possiamo prendere il piano per P e ortogonale alla generatrice r_0 passante per P cioè

$$\pi_P : 1(x-1) + 1(y-0) - 1(z-1) = 0$$

perché $\underline{n}_{\pi_P} = \underline{v}_{r_{0P}}$

$$\Rightarrow \quad \pi_P : x - 1 - y - z + 1 = 0 \iff$$

$$\pi_P : x - y - z = 0$$

Quindi

$$\pi_P \cap Q_2 : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x - y \\ x^2 + 2xy + y^2 + x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x - y \\ (x+y)^2 + x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

direttrice parabolica

Esercizio 4 (Esercizio proposto)

Sia data l'applicazione continua

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longrightarrow (u, v, uv)$$

e si denoti con $\Sigma = \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}^3$

(a) Determinare equazione cartesiana di Σ, verificando che è una quadrica generale omeomorfa a $\mathbb{R}^2$

(b) Riconoscere le immagini delle rette

$u = u_0$ con u_0 costante

$v = v_0$ con v_0 costante

(c) Classificare Σ e dedurre che è doppiamente rigata.

(d) Data la retta $r \subset \mathbb{E}^3$, di equazione parametrica vettoriale

$$r: \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verificare che r interseca Σ in 2 punti distinti

$$\Sigma \cap r = \{ q_1, q_2 \}$$

(e) Determinare le rette delle due schiere di Σ che passano per q_1

(f) Dedurre la f. c. a. di Σ

(a) Notare che

$$\Sigma : z = xy$$

ed è omeomorfa a $\mathbb{R}^2$ visto che φ omeomorfismo con inversa

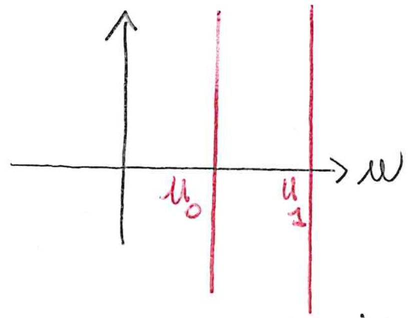
$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, xy) & \longrightarrow & (x, y) \end{array}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} rg(\tilde{A}) = 4 \\ rg(A) = 2 \\ \det(\tilde{A}) > 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \Sigma$ è generale

Anzi Σ è un paraboloide iperbolico (o a sella)

(b) Le rette parallele all'asse v di $\mathbb{R}^2$



vengono mappate da φ in

$$(u_0, v) \longrightarrow (u_0, v, u_0 v) = \begin{cases} x = u_0 \\ y = 0 + v \\ z = 0 + u_0 v \end{cases} : r_{u_0}$$

$$(u_1, v) \longrightarrow (u_1, v, u_1 v) : \begin{cases} x = u_1 \\ y = v \\ z = u_1 v \end{cases} : r_{u_1}$$

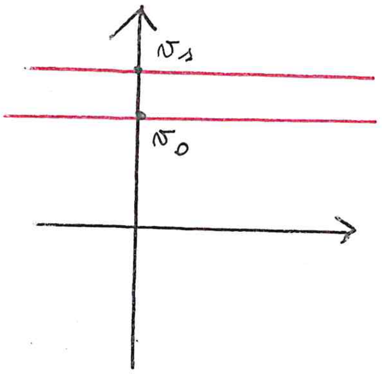
notare che per $u_0 \neq u_1 \Rightarrow r_{u_0} \cap r_{u_1} = \emptyset$

(φ omeomorfismo e le rette // in $\mathbb{R}^2$ non si intersecano)

però $\underline{v}_{r_{u_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_{r_{u_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_1 \end{pmatrix}$

non proporzionali $\Rightarrow$ <u>costituiscono una schiera di rette sghembe per $u_0 \in \mathbb{R}$ che varia</u>

Analogo con $v = v_0$ e $v = v_1$



$$(u, v_0) \longrightarrow (u, v_0, v_0 u) = \begin{cases} x = u \\ y = v_0 \\ z = v_0 u \end{cases} : s_{v_0}$$

$$(u, v_1) \longrightarrow (u, v_1, v_1 u) = \begin{cases} x = u \\ y = v_1 \\ z = v_1 u \end{cases} : s_{v_1}$$

rette $s_{v_0} \cap s_{v_1} = \phi$ e $\underline{v}_{s_{v_0}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_{s_{v_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix}$

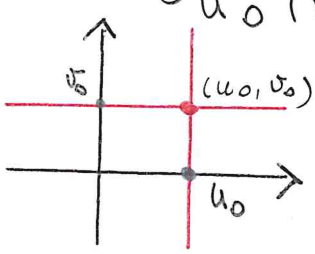
$\Rightarrow$ <u>costituiscono una schiera di rette sghembe</u>

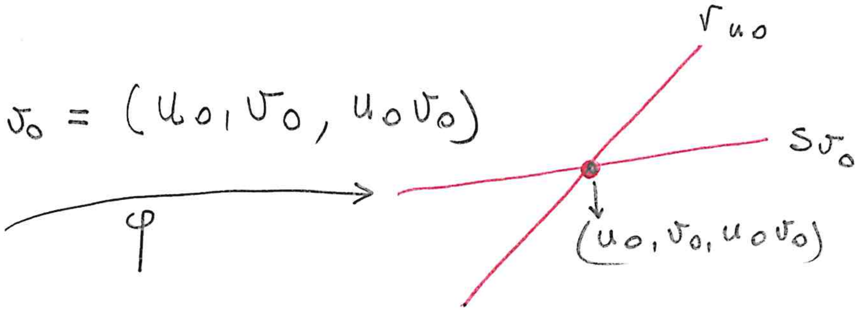
Notare che invece

$$r_{u_0} \cap s_{v_0} \neq \phi \qquad \forall\ (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} x = u_0 \\ y = v \\ z = u_0 v \\ x = u \\ y = v_0 \\ z = v_0 u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = u_0 \\ v = v_0 \\ u_0 v = v_0 u \end{cases} \quad \text{compatibile}$$

cioè $\quad r_{u_0} \cap s_{v_0} = (u_0, v_0, u_0 v_0)$





(c) Abbiamo già visto in (a) che Σ paraboloide iperbolico quindi doppiamente rigato, come dedotto anche da (b)

(d) $\Sigma \cap r \quad \begin{cases} z = xy \\ r \end{cases} \iff (2) = (1+t)(2+t)$

$\iff \cancel{2} = \cancel{2} + 3t + t^2 \iff t(t+3) = 0$

Perciò

$r \cap \Sigma$ è q_1 che corrisponde a $t = 0$

q_2 " " " $t = -3$

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(e) Poiché

$$q_1 = (1, 2, 2) = (u_0, v_0, u_0 \cdot v_0) \Rightarrow$$

$u_0 = 1$
$v_0 = 2$

Perciò

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = v \\ z = v \end{cases} \qquad s_2 : \begin{cases} x = u \\ y = 2 \\ z = u \end{cases}$$

Altrimenti

$$\vec{\nabla} P = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} P(q_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{\Sigma, q_1} : 2(x-1) + 1(y-2) - 1(z-2) = 0$$

$$2x - \cancel{2} + y - 2 - z + \cancel{2} = 0$$

$$\tau_{\Sigma, q_1} : 2x + y - z - 2 = 0$$

$$\Sigma \cap \tau_{\Sigma, q_1} : \begin{cases} z = xy \\ z = 2x + y - 2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} z = 2x + y - 2 \\ 2x + y - 2 = xy \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x + y - 2 \\ 2x + y - 2 - xy = 0 \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} z = 2x + y - 2 \\ x(2-y) + (y-2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2x + y - 2 \\ (x-1)(2-y) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ho 2 rette

$$\begin{cases} z = 2x + y - 2 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 2x + y - 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

incidenti (iperbole degenere)

(f) f.c.d. è

$$\left.\begin{array}{l} rg(A) = 2 \\ rg(\tilde{A}) = 4 \\ sgn(Q_2) = (1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z_1^2 - z_2^2 = z_3}$$