avente per righe ordinatamente i vettori $\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}$. Ciò è conseguenza immediata del contenuto dell'esempio (10.5, c). In particolare, se σ è una permutazione dell'insieme S_n e $k_1, \dots, k_n$ sono scalari in un campo K, si ha

$$\mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}(k_1, \dots, k_n) = \mathbf{D}_\sigma(k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)}).$$

Infatti la matrice a primo membro ha ordinatamente per righe i vettori $k_{\sigma(1)}\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)}\mathbf{e}_{\sigma(n)}$ e quindi coincide con la matrice a secondo membro.

(b) Sia ora A una matrice di tipo (m, n) le cui colonne siano, nell'ordine, $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$. La matrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_\sigma$ è quella avente per colonne $\mathbf{a}^{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \mathbf{a}^{\sigma^{-1}(n)}$. Ciò segue facilmente dalla (a) e dal fatto che

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_\sigma = ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_\sigma)^t)^t = (\mathbf{D}_\sigma{}^t \cdot \mathbf{A}^t)^t = (\mathbf{D}_{\sigma^{-1}} \cdot \mathbf{A}^t)^t.$$

In particolare si ha

$$\mathbf{D}(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{D}_\sigma = \mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n)$$

in quanto la matrice $\mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n)$ ha per colonne i vettori $k_{\sigma^{-1}(1)}\mathbf{e}^{\sigma^{-1}(1)}, \dots, k_{\sigma^{-1}(n)}\mathbf{e}^{\sigma^{-1}(n)}$, così come la matrice $\mathbf{D}(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{D}_\sigma$. Dalle precedenti considerazioni segue la formula

$$\mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n) = \mathbf{D}(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{D}_\sigma = \mathbf{D}_\sigma \cdot \mathbf{D}(k_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, k_{\sigma^{-1}(n)}). \qquad [13]$$

In definitiva, per ogni matrice A di tipo (n, m) su K le cui righe sono ordinatamente $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, la matrice $\mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{A}$ è quella avente per righe ordinatamente i vettori $k_1\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \dots, k_n\mathbf{a}_{\sigma(n)}$. Ciò segue dalla precedente formula [13] e dall'esempio (10.2). Se invece A è una matrice di tipo (m, n) su K le cui colonne siano ordinatamente $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$, la matrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n)$ è quella avente per colonne ordinatamente i vettori $k_{\sigma^{-1}(1)}\mathbf{a}^{\sigma^{-1}(1)}, \dots, k_{\sigma^{-1}(n)}\mathbf{a}^{\sigma^{-1}(n)}$.

(c) Si ha ancora

$$\mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n)^{-1} = \mathbf{D}_{\sigma^{-1}}(1/k_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, 1/k_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Infatti

$$\mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n)^{-1} = (\mathbf{D}(k_1, \dots, k_n) \cdot \mathbf{D}_\sigma)^{-1} = \mathbf{D}_{\sigma^{-1}} \cdot \mathbf{D}(k_1, \dots, k_n)^{-1} =$$
$$= \mathbf{D}_{\sigma^{-1}} \cdot \mathbf{D}(1/k_1, \dots, 1/k_n) = \mathbf{D}_{\sigma^{-1}}(1/k_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, 1/k_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Inoltre si ha analogamente

$$\mathbf{D}_\sigma(k_1, \dots, k_n)^t = \mathbf{D}_{\sigma^{-1}}(k_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, k_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Capitolo 11

Spazi quoziente e teoremi di omomorfismo

In questo capitolo introdurremo una costruzione che permette di ottenere, a partire da uno spazio vettoriale su un campo e da un suo sottospazio, un nuovo spazio vettoriale sullo stesso campo. Come conseguenza troveremo alcuni risultati che estendono e chiariscono il significato di altri già dimostrati in precedenza, come la formula di Grassmann (7.15) e il teorema del rango di una applicazione lineare (9.16).

1. Spazi quoziente

Sia V un K-spazio vettoriale e ne sia W un sottospazio. Definiamo in V la relazione $\mathcal{R}_W$ nel seguente modo. Data una coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ di vettori di V, si pone $\mathbf{v}\mathcal{R}_W\mathbf{v}'$ se e solo se il vettore $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$ appartiene a W.

(11.1) PROPOSIZIONE *$\mathcal{R}_W$ è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. $\mathcal{R}_W$ è riflessiva: infatti, essendo $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \in \mathbf{W}$, si ha $\mathbf{v}\mathcal{R}_W\mathbf{v}$.

$\mathcal{R}_W$ è simmetrica, infatti, se $\mathbf{v}\mathcal{R}_W\mathbf{v}'$ allora si ha $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W}$. Quindi $-(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \mathbf{W}$ e perciò $\mathbf{v}'\mathcal{R}_W\mathbf{v}$.

$\mathcal{R}_W$ è transitiva. Se $\mathbf{v}\mathcal{R}_W\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}'\mathcal{R}_W\mathbf{v}''$, allora si ha $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'' \in \mathbf{W}$. Quindi $(\mathbf{v} - \mathbf{v}') + (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') = \mathbf{v} - \mathbf{v}'' \in \mathbf{W}$ e perciò $\mathbf{v}\mathcal{R}_W\mathbf{v}''$. ∎

L'insieme quoziente $\mathbf{V}/\mathcal{R}_W$ si denota col simbolo $\mathbf{V}/\mathbf{W}$, che si legge V *modulo* W.

(11.2) *Esempio* *Gli insiemi* $\mathbf{V}/(\mathbf{0})$ *e* $\mathbf{V}/\mathbf{V}$

Descriviamo la relazione $\mathcal{R}_W$ nei due casi banali $\mathbf{W} = (\mathbf{0})$ e $\mathbf{W} = \mathbf{V}$. Nel primo si ha $\mathbf{v}\mathcal{R}_W\mathbf{v}'$ se e solo se $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W} = (\mathbf{0})$ e quindi se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Dunque in questo caso $\mathcal{R}_W$ non è altro che l'uguaglianza in V e $\mathbf{V}/(\mathbf{0})$ è pertanto identificabile in modo naturale con V. Se $\mathbf{W} = \mathbf{V}$, ogni coppia di vettori di V è nella relazione di equivalenza $\mathcal{R}_W$ e quindi V/V è l'insieme costituito dall'unica classe di equivalenza V.

La seguente proposizione chiarisce in generale la struttura delle classi di equivalenza per la relazione $\mathcal{R}_W$, cioè degli elementi di V/W.

(11.3) PROPOSIZIONE *Per ogni vettore* $v \in V$ *si ha*

$$\mathcal{R}_W(v) = v + W = \{v + w, \text{ al variare di } w \text{ in } W\}.$$

Dimostrazione. Se $v' \in \mathcal{R}_W(v)$, allora $v - v' \in W$. Detto w l'elemento $v' - v$ di W, si ha $v' = v + w \in v + W$. Viceversa, se $v' \in v + W$, esiste un vettore $w \in W$ tale che $v' = v + w$. Ma allora $v' - v = w \in W$, quindi $v \mathcal{R}_W v'$, cioè $v' \in \mathcal{R}_W(v)$. ∎

Quanto precede si può anche esprimere dicendo (vedi p. 47) che *le classi di equivalenza per la relazione* $\mathcal{R}_W$ *sono tutti e soli i traslati del sottospazio* W *mediante tutti i vettori di* V.

(11.4) *Esempio Un esempio geometrico*

Prendiamo come spazio vettoriale V l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale Ω_X introdotto nell'esempio (3.1). Prendiamo poi come sottospazio W una retta r [risp. un piano π] passante per X. Come abbiamo visto nell'esempio (4.15), tutti e soli i traslati di W sono le rette [risp. i piani] dello spazio parallele a r [risp. paralleli a π]. In altri termini $V/W = \{$rette dello spazio parallele a $r\}$ [risp. $V/W = \{$piani dello spazio paralleli a $\pi\}$].

Introduciamo ora una struttura di K-spazio vettoriale su V/W in modo tale che l'applicazione quoziente

$$p : v \in W \to v + W \in V/W$$

sia una applicazione lineare, e quindi un epimorfismo, che sarà detto *epimorfismo canonico*. Il K-spazio vettoriale V/W sarà detto *quoziente di* V *modulo* W.

A tale scopo procediamo nel seguente modo. Sia $(v + W, v' + W)$ una coppia di elementi di V/W. Noi definiamo la *somma* $(v + W) + (v' + W)$ ponendo

$$(v + W) + (v' + W) = (v + v') + W.$$

Similmente, se $v + W \in V/W$ e k è uno scalare definiamo il *prodotto* $k(v + W)$ ponendo

$$k(v + W) = kv + W.$$

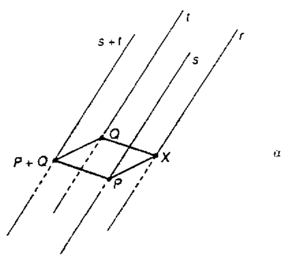

Figura 11.1

Queste definizioni hanno senso perché non dipendono dai vettori coinvolti, bensì solo dalle loro classi di equivalenza. Si dimostra infatti facilmente che

$$(v + W = w + W,\ v' + W = w' + W) \Rightarrow (v + v') + W = (w + w') + W$$

$$v + W = w + W \Rightarrow kv + W = kw + W.$$

Limitiamoci a verificare la prima di tali implicazioni, lasciando l'analoga dimostrazione della seconda al lettore. Da $v + W = w + W$, $v' + W = w' + W$ segue che $v - w$ e $v' - w'$ appartengono a W. Allora anche $(v - w) + (v' - w') = (v + v') - (w + w')$ appartiene a W e ciò implica, come volevasi, che $(v + v') + W = (w + w') + W$.

Dunque le operazioni $+$ e $\cdot$ su V/W sono ben definite. Esse inoltre verificano gli assiomi (SV1), ..., (SV8) della definizione di spazio vettoriale: di ciò lasciamo la semplice prova al lettore. In definitiva $V/W(+,\cdot)$ è un K-spazio vettoriale, ed è inoltre ovvio, a questo punto, che l'applicazione quoziente p è lineare.

Osserviamo che il vettore nullo in V/W è la classe $0 + W = W$. Notiamo pure che

$$\operatorname{Ker} p = W.$$

Infatti, dato un vettore $v \in V$, si ha $p(v) = 0 + W = W$ se e solo se $v + W = 0 + W$ e quindi se e solo se $v = v - 0 \in W$. Se V è finitamente generato si ha

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Infatti dal teorema del rango si discende che

$$\dim V/W = \dim \operatorname{Im} p = \dim V - \dim \operatorname{Ker} p = \dim V - \dim W.$$

(11.5) *Esempio*

Torniamo all'esempio (11.4) nel caso in cui W è una retta r. Per *sommare* in Ω_X/r due rette s e t parallele a r si procede così. Si fissa un piano α non parallelo a r passante per X, che è un sottospazio di Ω_X. Per sommare r e s basta sommare i punti $\alpha \cap r$ e $\alpha \cap s$ in α e poi condurre l'unica retta parallela a r per il punto somma, come illustrato nella figura 11.1, in cui $P = \alpha \cap r$ e $Q = \alpha \cap s$. Un'analoga costruzione vale nel caso W sia un piano π.

2. Il primo teorema di omomorfismo

Siano V, W spazi vettoriali sul campo K e sia $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una applicazione lineare. Ricordiamo che sono definiti Ker f e Im f, rispettivamente sottospazi di V e W. È inoltre definito il quoziente V/Ker f, e vale il seguente:

(11.6) TEOREMA (Primo teorema degli omomorfismi) *L'applicazione*

$$\phi_f : \mathbf{v} + \operatorname{Ker} f \in \mathbf{V}/\operatorname{Ker} f \to f(\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} f \subseteq \mathbf{W}$$

è ben definita ed è un isomorfismo che prende il nome di isomorfismo canonico, *indotto da f, di* V/Ker f *su* Im f. *Esso viene indicato anche semplicemente col simbolo* ϕ *se ciò non causa confusione. Si ha inoltre* $f = \phi_f \circ p$, *dove*

$$p : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\operatorname{Ker} f$$

è l'epimorfismo canonico.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ elementi di V. Si ha $f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}')$ se e solo se $f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}') = f(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = \mathbf{0}$ cioè se e solo se $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \operatorname{Ker} f$. Ciò implica che la ϕ è ben definita ed iniettiva. La suriettività è ovvia. Quanto alla linearità, verifichiamo ad esempio la (AL1) lasciando la analoga verifica della (AL2) al lettore. Se $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ sono elementi di V, si ha

$$\phi((\mathbf{v} + \operatorname{Ker} f) + (\mathbf{v}' + \operatorname{Ker} f)) = \phi((\mathbf{v} + \mathbf{v}') + \operatorname{Ker} f) = f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') =$$

$$= f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}') = \phi(\mathbf{v} + \operatorname{Ker} f) + \phi(\mathbf{v}' + \operatorname{Ker} f).$$

L'ultima asserzione è ovvia. ▪

Sia $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una applicazione lineare tra K-spazi vettoriali. Se $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} f$, il sottoinsieme $f^{-1}(\mathbf{w})$ si dice *fibra* di f su $\mathbf{w}$. In applicazione del teorema (11.6) si può illustrare la struttura delle fibre di una applicazione lineare. Infatti si ha il seguente:

(11.7) COROLLARIO *Se* $\mathbf{v}$ *è un vettore di* V *si ha*

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = \mathbf{v} + \operatorname{Ker} f.$$

Dimostrazione. Essendo, con le notazioni del teorema (11.6), $f = \phi_f \circ p$, si ha

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = (\phi \circ p)^{-1}(f(\mathbf{v})) = p^{-1}(\phi^{-1}(f(\mathbf{v}))) = p^{-1}(\xi)$$

ove si è posto $\xi = \phi^{-1}(f(\mathbf{v}))$. Per la proposizione (11.3), $p^{-1}(\xi)$ è un traslato di Ker f. Poiché $\mathbf{v} \in p^{-1}(\xi)$, si ha in definitiva

$$f^{-1}(f(\mathbf{v})) = p^{-1}(\xi) = \mathbf{v} + \operatorname{Ker} f$$

cioè l'asserto. ▪

3. Il secondo teorema di omomorfismo

Sia V un K-spazio vettoriale e supponiamo si abbia $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}'$. Possiamo allora considerare i quozienti V/W e $\mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$. Si ha il:

(11.8) TEOREMA (Secondo teorema degli omomorfismi) *L'applicazione*

$$\psi : \mathbf{v} + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}') \in \mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}' \to \mathbf{v} + \mathbf{W} \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$$

è ben definita ed è un isomorfismo di $\mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$ *su* V/W.

Dimostrazione. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono elementi di $\mathbf{W}'$ tali che $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$, in particolare si ha $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W}$, sicché $\mathbf{v} + \mathbf{W} = \mathbf{v}' + \mathbf{W}$. Dunque ψ è ben definita. La linearità è ovvia e se ne lascia la verifica al lettore. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}'$ e $\psi(\mathbf{v} + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}')) = \mathbf{0}$, allora si ha $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$, ossia $\mathbf{v} \in \mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$, e quindi $\mathbf{v} + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}') = \mathbf{0}$ in $\mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$, cioè $\operatorname{Ker} \psi = (\mathbf{0})$ e ψ è iniettiva. Veniamo infine alla suriettività. Se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, si ha $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ con $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}'$. Allora $\mathbf{v} + \mathbf{W} = \mathbf{w}' + \mathbf{W} = \psi(\mathbf{w}' + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'))$. ▪

(11.9) COROLLARIO

(a) *Se* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}'$, W *è isomorfo a* $\mathbf{V}/\mathbf{W}'$.

(b) *Se* $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}' = \mathbf{W} + \mathbf{W}''$, *gli spazi vettoriali* $\mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'$ *e* $\mathbf{W}''/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}''$ *sono isomorfi.*

(c) *Se* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}' = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}''$, *gli spazi vettoriali* $\mathbf{W}'$ *e* $\mathbf{W}''$ *sono isomorfi.*

Dimostrazione. La (a) è immediata conseguenza del teorema (11.8) in quanto $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}' = (\mathbf{0})$. Dimostriamo la (b). Per ciò, basta comporre l'isomorfismo

$$\psi : \mathbf{v} + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}') \in \mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}' \to \mathbf{v} + \mathbf{W} \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$$

con l'inverso dell'isomorfismo

$$\psi' : \mathbf{v} + (\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'') \in \mathbf{W}''/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}'' \to \mathbf{v} + \mathbf{W} \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$$

per ottenere un isomorfismo $\Psi : \mathbf{W}'/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}' \to \mathbf{W}''/\mathbf{W} \cap \mathbf{W}''$. La (c) è conseguenza ovvia della (b). ▪

4. I sottospazi di uno spazio quoziente

Sia V un K-spazio vettoriale e ne sia W un sottospazio. Determiniamo i sottospazi dello spazio quoziente V/W.

A tale scopo osserviamo il seguente fatto generale:

(11.10) PROPOSIZIONE *Sia $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una applicazione lineare tra* K*-spazi vettoriali e sia* C *un sottospazio di* B*. Allora $f^{-1}(\mathbf{C})$ è un sottospazio di* A*, detto* controimmagine *di* C *tramite* f.

Dimostrazione. Se v e w sono vettori di $f^{-1}(\mathbf{C})$ si ha $f(\mathbf{v}) \in \mathbf{C}$ e $f(\mathbf{w}) \in \mathbf{C}$. Allora $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \in \mathbf{C}$, ossia $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in f^{-1}(\mathbf{C})$. Ciò prova la stabilità di $f^{-1}(\mathbf{C})$ per la somma. Quella per il prodotto è analoga e se ne lascia la verifica al lettore. ▪

Osserviamo ora che se W′ è un sottospazio di V che contiene W e se $p : \mathbf{V} \to \mathbf{V}/\mathbf{W}$ è l'epimorfismo canonico, $p(\mathbf{W}')$ non è altro che W′/W ed è un sottospazio di V/W. Noi vogliamo dimostrare che tutti i sottospazi di V/W sono ottenibili in tal modo.

Sia H un sottospazio di V/W. La controimmagine di H tramite l'epimorfismo canonico p è un sottospazio W′ di V che ovviamente contiene $\mathrm{Ker}\,p = \mathbf{W}$. Consideriamo l'applicazione lineare $p_{|\mathbf{W}'} : \mathbf{W}' \to \mathbf{H}$. Questa è suriettiva perché p è suriettiva. Inoltre si ha

$$\mathrm{Ker}\,p_{|\mathbf{W}} = (\mathrm{Ker}\,p) \cap \mathbf{W}' = \mathbf{W} \cap \mathbf{W}' = \mathbf{W}.$$

Quindi, per il teorema (11.6), si ha che H è isomorfo a W′/W.

In definitiva abbiamo dimostrato la seguente:

(11.11) PROPOSIZIONE *Sia $S(\mathbf{V}/\mathbf{W})$ l'insieme dei sottospazi di* V/W *e sia $S(\mathbf{V},\mathbf{W})$ l'insieme dei sottospazi di* V *contenenti* W*. L'applicazione*

$$\mathbf{W}' \in S(\mathbf{V},\mathbf{W}) \to \mathbf{W}'/\mathbf{W} \in S(\mathbf{V}/\mathbf{W})$$

è una biiezione.

Un altro utile risultato a proposito dei sottospazi di V/W è il seguente:

(11.12) PROPOSIZIONE *Sia* V *un* K*-spazio vettoriale e ne siano* W, W′ *sottospazi tali che* $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}'$*. Allora* V/W′ *è isomorfo a* (V/W)/(W′/W).

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione

$$f : \mathbf{v}+\mathbf{W} \in \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{v}+\mathbf{W}' \in \mathbf{V}/\mathbf{W}'.$$

Essa è ben definita. Infatti, se v e v′ sono vettori di V tali che $\mathbf{v}-\mathbf{v}' \in \mathbf{W}$, allora $\mathbf{v}-\mathbf{v}' \in \mathbf{W}'$ e quindi $\mathbf{v}+\mathbf{W}' = \mathbf{v}'+\mathbf{W}'$. Inoltre la f è chiaramente suriettiva e si verifica pure facilmente che è lineare. Infine $\mathbf{v}+\mathbf{W}$ sta nel nucleo di f se e solo se $\mathbf{v} \in \mathbf{W}'$. Quindi $\mathrm{Ker}\,f$ non è altro che W′/W. L'asserto segue dal teorema (11.6). ▪

5. Somme dirette e spazi quozienti

Sia V in K-spazio vettoriale e si abbia $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}'$. Allora ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si esprime in unico modo come $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, dove $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}'$. Si può considerare l'applicazione

$$\pi : \mathbf{v} \in \mathbf{V} \to \mathbf{w}' \in \mathbf{W}'.$$

La π si dice *proiezione* di V su W′ secondo la giacitura, o la direzione, di W. È facile verificare che π è lineare ed è chiaro che è pure suriettiva. Infatti $\pi_{|\mathbf{W}'} = \mathrm{id}_{|\mathbf{W}'}$ cioè per ogni $\mathbf{w}' \in \mathbf{W}$ si ha $\pi(\mathbf{w}') = \mathbf{w}'$. Inoltre si ha evidentemente $\mathrm{Ker}\,\pi = \mathbf{W}$. Applicando il teorema (11.6) si trova allora che $\phi_\pi : \mathbf{V}/\mathbf{W} \to \mathbf{W}'$, il che rende esplicito l'isomorfismo la cui esistenza è asserita dal corollario (11.9, a).

Ora osserviamo che la proiezione $\pi : \mathbf{V} \to \mathbf{W}' \subseteq \mathbf{V}$ si può riguardare come un endomorfismo di V e come tale gode della proprietà che $\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi$. Infatti, come abbiamo visto, π è l'identità su $\mathrm{Im}\,\pi = \mathbf{W}'$. Ciò si esprime dicendo che π è un endomorfismo *idempotente* di V.

Viceversa abbiamo la seguente:

(11.13) PROPOSIZIONE *Sia dato un endomorfismo idempotente f di* V*. Allora*

$$\mathbf{V} = \mathrm{Ker}\,f \oplus \mathrm{Im}\,f$$

e f è la proiezione di V *su* $\mathrm{Im}\,f$ *secondo la giacitura di* $\mathrm{Ker}\,f$.

Dimostrazione. Se $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f$, esiste un w tale che $\mathbf{v} = f(\mathbf{w})$, e quindi si ha

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{v}) = f(f(\mathbf{w})) = f(\mathbf{w}) = \mathbf{v}.$$

Quindi $\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f = (\mathbf{0})$. Inoltre, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, allora $\mathbf{v} - f(\mathbf{v}) \in \mathrm{Ker}\,f$ in quanto

$$f(\mathbf{v} - f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) - f(f(\mathbf{v})) = f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}) = 0.$$

Pertanto $\mathbf{v} \in f(\mathbf{v}) + \mathrm{Ker}\,f$, il che prova che $\mathbf{V} = \mathrm{Ker}\,f \oplus \mathrm{Im}\,f$. Infine, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e si scrive $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, con $\mathbf{w} \in \mathrm{Ker}\,f$ e $\mathbf{w}' \in \mathrm{Im}\,f$, si ha

$$f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{w} + \mathbf{w}') = f(\mathbf{w}) + f(\mathbf{w}') = f(\mathbf{w}') = \mathbf{w}'$$

il che prova la parte finale dell'asserto. ▪

Concludiamo dimostrando un risultato da cui si può dedurre una nuova dimostrazione della formula di Grassmann (teorema (7.15)).

(11.14) PROPOSIZIONE *Sia* V *un* K*-spazio vettoriale e si abbia* $V = W + W'$. *Allora* $V/W \cap W'$ *è somma diretta di* $W/W \cap W'$ *e di* $W/W \cap W'$.

Dimostrazione. Sia $p : V \to V/W \cap W'$ l'epimorfismo canonico. Poiché $V = W + W'$ si ha

$$V/W \cap W' = \langle p(W) \cup p(W') \rangle = p(W) + p(W') = W/W \cap W' + W'/W \cap W'.$$

Inoltre è facile verificare che $p(W) \cap p(W') = (0)$, come volevasi. ∎

Per dedurre la formula di Grassmann dal precedente teorema si procede così. Siano V_1 e V_2 sottospazi finitamente generati di uno spazio vettoriale V sul campo K. Applicando il teorema si ha

$$\dim V_1 + V_2 - \dim V_1 \cap V_2 = \dim V_1 + V_2/V_1 \cap V_2 =$$

$$= \dim V_1/V_1 \cap V_2 + \dim V_2/V_1 \cap V_2 = \dim V_1 + \dim V_2 - 2 \dim V_1 \cap V_2$$

e da ciò segue la formula di Grassmann.

(11.15) *Esempio*

Ci riferiamo ancora all'esempio (11.4) dello spazio Ω_X. Se α e β sono due piani distinti per X, Ω_X è somma, ma non somma diretta, di α e β. Sia $r = \alpha \cap \beta$. La proposizione (11.14), in questo caso, dice che Ω_X/r è somma diretta di α/r e β/r. L'interpretazione geometrica di questo fatto è la seguente. Ω_X/r è, come abbiamo visto, isomorfo ad un qualunque piano π per X non contenente la retta r. In tale isomorfismo α/r e β/r hanno per immagini le rette $a = \alpha \cap \pi$ e $b = \beta \cap \pi$ che sono rette distinte di π passanti per X. È chiaro allora che π è somma diretta di a e b, che hanno solo il punto X a comune. Ciò è illustrato nella figura (11.2).

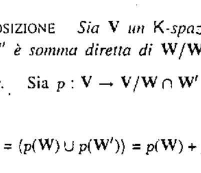

Figura 11.2

Capitolo 12

Spazi vettoriali di applicazioni lineari e spazio duale

In questo capitolo costruiremo e studieremo nuovi spazi i cui elementi sono applicazioni lineari tra spazi vettoriali assegnati. In particolare considereremo l'importante concetto di *spazio duale* che è lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni lineari di un K-spazio vettoriale V nel campo K.

1. Lo spazio vettoriale degli omomorfismi tra due spazi vettoriali

Siano V e W spazi vettoriali sul campo K. Ricordiamo dall'esempio (3.6) che l'insieme M(V, W) delle applicazioni di V in W è dotato di una struttura di spazio vettoriale su K. Consideriamo il *sottoinsieme* Hom(V, W) di M(V, W) costituito dalle applicazioni lineari di V in W. Esso è stabile per le operazioni di M(V, W), e dunque ne è un sottospazio. In altri termini la somma di due applicazioni lineari e il prodotto di una applicazione lineare per uno scalare sono ancora applicazioni lineari. Infatti, se f e g sono applicazioni lineari, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ sono elementi di V e k e h sono scalari, tenendo presente le definizioni di $f + g$ e di kf date nell'esempio (3.6) e la linearità di f e g, si ha

$$(f+g)(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = f(\mathbf{v}+\mathbf{v}') + g(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}') + g(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}') =$$

$$= f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}') + g(\mathbf{v}') = (f+g)(\mathbf{v}) + (f+g)(\mathbf{v}');$$

$$(f+g)(k\mathbf{v}) = f(k\mathbf{v}) + g(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v}) + kg(\mathbf{v}) =$$

$$= (kf)(\mathbf{v}) + (kg)(\mathbf{v}) = (kf + kg)(\mathbf{v});$$

$$(kf)(\mathbf{v}+\mathbf{v}') = k(f(\mathbf{v}+\mathbf{v}')) = k(f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}')) =$$

$$= kf(\mathbf{v}) + kf(\mathbf{v}') = (kf)(\mathbf{v}) + (kf)(\mathbf{v}');$$

$$(kf)(h\mathbf{v}) = k(f(h\mathbf{v})) = k(hf(\mathbf{v})) =$$

$$= khf(\mathbf{v}) = h(kf(\mathbf{v})) = h(kf)(\mathbf{v}).$$

Il K-spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, W)$ si denota pure talvolta col simbolo $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ove si voglia mettere in evidenza il campo K su cui V e W si considerano come spazi vettoriali. Ad esempio, se V e W sono C-spazi vettoriali, essi sono anche R-spazi vettoriali e Q-spazi vettoriali. È allora ben differente la considerazione di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$, di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ o di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W)$.

(12.1) *Esempio*

Il vettore nullo di $\mathrm{Hom}(V, W)$ è *l'applicazione nulla* (vedi esempio (9.1)). Se V o W è lo spazio nullo, è chiaro che $\mathrm{Hom}(V, W)$ è anch'esso nullo in quanto l'unica applicazione lineare di V in W è quella nulla. Viceversa, se $\mathrm{Hom}(V, W)$ è nullo, anche V oppure W è nullo. Infatti, se V e W sono entrambi non nulli, esiste qualche applicazione lineare non nulla di V in W: basta ad esempio prolungare per linearità un'applicazione di una base H di V in W che non associ a tutti gli elementi di H il vettore nullo di W.

(12.2) *Esempio* *Spazi di omomomorfismi tra spazi di vettori numerici*

Ricordando quanto si è detto nel capitolo 10 a proposito degli omomorfismi tra spazi di vettori numerici, possiamo considerare l'applicazione

$$\phi : A \in M(m, n, K) \to f_A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$$

dove K^n si identifica con $M(n, 1, K)$ e K^m con $M(m, 1, K)$. La proposizione (10.4) assicura che la ϕ è biiettiva, e la sua inversa è l'applicazione

$$\psi : f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to M(f) \in M(m, n, K).$$

Di più, essa è un isomorfismo di spazi vettoriali. Verifichiamone la linearità. Siano A e B matrici di tipo (m, n) su K e sia x un qualunque vettore $M(n, 1, K)$. Si ha

$$f_{A+B}(x) = (A + B) \cdot x = (A \cdot x) + (B \cdot x) = f_A(x) + f_B(x).$$

Quindi le applicazioni f_{A+B} e $f_A + f_B$ coincidono, ossia

$$\phi(A + B) = f_{A+B} = f_A + f_B = \phi(A) + \phi(B).$$

Similmente si vede che ogni matrice $A \in M(m, n, K)$ e per ogni scalare $k \in K$, si ha

$$\phi(kA) = f_{kA} = kf_A = k\phi(A).$$

Tenendo presente che ϕ è un isomorfismo il cui inverso è ψ, si ha

$$\psi(f + g) = M(f + g) = M(f) + M(g) = \psi(f) + \psi(g)$$

per ogni coppia (f, g) di omomorfismi in $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, e

$$\psi(kf) = M(kf) = kM(f) = k\psi(f)$$

per ogni omomorfismo f in $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ e per ogni scalare $k \in K$. In definitiva, tenendo presente anche l'esempio (6.22), si ha

$$\dim \mathrm{Hom}(K^n, K^m) = nm.$$

Siano ora V, W, Z spazi vettoriali su K e siano $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ applicazioni lineari. Possiamo considerare le applicazioni:

$$\rho_{f,Z} : h \in \mathrm{Hom}(W, Z) \to h \circ f \in \mathrm{Hom}(V, Z)$$

$$\sigma_{g,V} : k \in \mathrm{Hom}(V, W) \to g \circ k \in \mathrm{Hom}(V, Z).$$

Questi sono entrambi omomorfismi. Verifichiamo ad esempio che la $\rho_{f,Z}$ gode della proprietà (AL1), lasciando le altre verifiche al lettore. Se h, h' sono elementi di $\mathrm{Hom}(W, Z)$ e v è un qualunque vettore di V si ha

$$\rho_{f,Z}(h + h')(v) = (h + h') \circ f(v) = (h + h')(f(v)) =$$

$$= h(f(v)) + h'(f(v)) = \rho_{f,Z}(h)(v) + \rho_{f,Z}(h')(v)$$

il che prova che

$$\rho_{f,Z}(h + h') = \rho_{f,Z}(h) + \rho_{f,Z}(h').$$

Se $f : V \to W$ è un isomorfismo si verifica facilmente, il che lasciamo al lettore, che $\rho_{f,Z}$ è anch'esso un isomorfismo, il cui inverso è

$$\rho_{f^{-1},Z} : \mathrm{Hom}(V, Z) \to \mathrm{Hom}(W, Z).$$

Similmente, se $g : W \to Z$ è un isomorfismo, allora $\sigma_{g,V}$ è un isomorfismo il cui inverso è $\sigma_{g^{-1},V}$. Come conseguenza degli omomorfismi dianzi descritti si ha la seguente:

(12.3) PROPOSIZIONE *Siano* V, V', W, W' *spazi vettoriali su* K. *Se* V *è isomorfo a* V' *e* W *è isomorfo a* W', *allora* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *è isomorfo a* $\mathrm{Hom}(V', W')$.

Dimostrazione. Siano $f : V \to V'$ e $g : W \to W'$ isomorfismi. Si hanno degli isomorfismi:

$$\sigma_{g,V} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(V, W'), \quad \rho_{f^{-1},W'} : \mathrm{Hom}(V, W') \to \mathrm{Hom}(V', W')$$

e pertanto $\rho_{f^{-1},W'} \circ \sigma_{g,V}$ è un isomorfismo di $\mathrm{Hom}(V, W)$ su $\mathrm{Hom}(V', W')$. ∎

(12.4) COROLLARIO *Se V e W sono spazi vettoriali su K di dimensioni n e m rispettivamente, allora* Hom(V, W) *è isomorfo a* M(m, n, K) *e dunque ha dimensione nm.*

Dimostrazione. È immediata conseguenza della proposizione (12.3) e dell'esempio (12.2). Volendo dare in modo esplicito un isomorfismo tra Hom(V, W) e M(m, n, K) si procede così. Si fissino dei riferimenti R e S di V e W rispettivamente. L'applicazione

$$\mu_{S,R} : f \in \mathrm{Hom}(V, W) \to M_{S,R}(f) \in M(m, n, K)$$

è un isomorfismo. ▪

Esamineremo ora due casi particolari importanti degli spazi del tipo Hom(V, W), e precisamente i casi W = V e W = K.

2. L'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale

Lo spazio vettoriale Hom(V, V) di tutti gli *endomorfismi* del K-spazio vettoriale V si denota anche col simbolo End(V), o con quello più preciso $\mathrm{End}_K(V)$. In End(V) è definita, oltre alle operazioni di spazio vettoriale, anche un'altra operazione interna, detta *prodotto*, e precisamente la seguente:

$$(f, g) \in \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \to g \cdot f = f \circ g \in \mathrm{End}(V).$$

Questa operazione è associativa, ammette come elemento neutro l'applicazione identica di V, e, come segue dalle considerazioni fatte dianzi, è distributiva rispetto alla somma. Di conseguenza End(V), munito delle operazioni interne di somma e prodotto, è un anello unitario (vedi p. 16).

Il sottoinsieme di End(V) costituito dagli *automorfismi* di V si denota col simbolo Aut(V) o anche col simbolo Gl(V), o coi simboli più precisi $\mathrm{Aut}_K(V)$ e Gl(V, K). Esso è stabile per l'operazione interna di prodotto, ma se V è non nullo, *non* è un sottospazio vettoriale di End(V), poiché, ad esempio, non contiene l'applicazione nulla che non è mai un automorfismo di V se V non è nullo. Per ogni $f \in \mathrm{Gl}(V)$ esiste in Gl(V) anche l'elemento f^{-1} che è l'inverso di f per l'operazione interna di prodotto, in quanto

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V.$$

Pertanto Gl(V), munito dell'operazione interna di prodotto, è un gruppo, detto *gruppo degli automorfismi* di V o *gruppo lineare generale* di V.

È importante notare la seguente:

(12.5) PROPOSIZIONE *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione n. Allora l'anello* $\mathrm{End}_K(V)$ *è isomorfo all'anello* M(n, n, K) *delle matrici quadrate d'ordine n su K, e il gruppo* Gl(V, K) *è isomorfo al gruppo lineare generale* Gl(n, K).

Dimostrazione. Si fissi un riferimento R di V. L'applicazione

$$\mu_R : f \in \mathrm{End}_K(V) \to M_R(f) \in M(n, n, K)$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali (vedi dimostrazione del corollario (12.4)). La proposizione (10.13, a) assicura che esso è un isomorfismo di anelli. Infine è chiaro che la restrizione di μ_R a Gl(V, K) induce un isomorfismo di quest'ultimo su Gl(n, K). ▪

Osserviamo esplicitamente che, se dim V > 0, allora End(V) è un anello né commutativo né integro, perché tale non è M(n, n, K) (vedi esempio (10.2)).

3. Spazio duale di uno spazio vettoriale

Passiamo ora a considerare lo spazio vettoriale Hom(V, K). Esso si dice *spazio duale* di V e si denota col simbolo V^*. I suoi elementi, che sono applicazioni lineari di V in K, si dicono anche *forme lineari* o *funzionali lineari* su V.

D'ora in avanti supporremo V finitamente generato, di dimensione n. Sappiamo allora che

$$\dim V^* = \dim V = n.$$

Sia $R = (v_1, \ldots, v_n)$ un riferimento di V. Per ogni vettore v di V denotiamo con $(v_1, \ldots, v_n)$ la n-upla delle componenti di v nel riferimento R; cioè si ha

$$v = v_1 v_1 + \ldots + v_n v_n.$$

Definiamo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, l'applicazione

$$v_i^* : v \in V \to v_i \in K.$$

Dunque v_i^* associa ad ogni vettore di V la sua i-esima componente nel riferimento R. È ovvio che, per ogni $i = 1, \ldots, n$, l'applicazione v_i^* è lineare, ossia è un elemento di V^*.

Per ogni coppia (i, j) di elementi di I_n si ha

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è il cosiddetto *simbolo di Kronecker*, che vale 1 se $i = j$ e vale 0 se $i \neq j$. Quindi, se

$$f = \alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*$$

è un elemento di V^*, ossia una applicazione lineare di V in K, dipendente linearmente da $v_1^*, \ldots, v_n^*$, si ha, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$f(v_i) = (\alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = \alpha_1 v_1^*(v_i) + \ldots + \alpha_n v_n^*(v_i) = \alpha_i.$$

(12.6) PROPOSIZIONE *Il sistema* $S^* = [v_1^*, \dots, v_n^*]$ *è una base di* V^*.

Dimostrazione. Poiché V^* ha dimensione n, basta provare che S^* è indipendente. Si abbia

$$\alpha_1 v_1^* + \dots + \alpha_n v_n^* = 0$$

dove 0, lo ricordiamo, è l'applicazione nulla di V in K, cioè l'applicazione che ad ogni vettore di V associa lo 0 di K. Si ha allora, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$0 = 0(v_i) = (\alpha_1 v_1^* + \dots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = \alpha_i$$

il che prova che S^* è linearmente indipendente. ▪

La base S^* di V^* dice *base duale* della base $S = [v_1, \dots, v_n]$ di V e $R^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ si dice *riferimento duale* di R. Denoteremo con il simbolo ψ_S l'unico isomorfismo di V su V^* tale che per ogni $i = 1, \dots, n$ si abbia

$$\psi_S(v_i) = v_i^*.$$

Notiamo che ψ_S dipende solo dalla base S e non dal riferimento R.

4. Lo spazio biduale

Possiamo ora considerare anche lo spazio $(V^*)^*$ duale di V^*, che denoteremo semplicemente col simbolo V^{**} e chiameremo *spazio biduale* di V. Naturalmente anche V^{**} è isomorfo a V essendo isomorfo a V^*, e una sua base è data da $S^{**} = [(v_1^*)^*, \dots, (v_n^*)^*]$, detta *base biduale* di S. Per ogni coppia (i, j) di elementi dell'insieme I_n si ha

$$(v_i^*)^*(v_j^*) = \delta_{ij}.$$

Un isomorfismo da V al suo biduale si ottiene componendo gli isomorfismi

$$\psi_S : V \to V^*, \quad \psi_{S^*} : V^* \to V^{**}.$$

Denoteremo col simbolo Ψ_S questo isomorfismo, che *a priori* dipende dalla scelta della base S di V. Ma noi proveremo ora che ciò di fatto non accade, ossia proveremo che se S e S' sono due basi di V, si ha $\Psi_S = \Psi_{S'}$. A tale scopo procediamo nel modo seguente. Sia v un vettore di V. Definiamo l'applicazione

$$v^{**} : V^* \to K$$

in questo modo. Per ogni elemento f di V^*, che dunque è un'applicazione lineare $f : V^* \to K$, si pone

$$v^{**}(f) = f(v).$$

Questa applicazione è lineare. Infatti, se f e g sono elementi di V^*, si ha

$$v^{**}(f + g) = (f + g)(v) = f(v) + g(v) = v^{**}(f) + v^{**}(g)$$

il che prova la (AL1). Similmente si verifica la (AL2). Dunque, qualunque sia v in V, il vettore v^{**} appartiene a V^{**}. Si ha così una applicazione

$$\Psi : v \in V \to v^{**} \in V^{**}.$$

(12.7) PROPOSIZIONE *Per ogni base* S *di* V, *si ha* $\Psi_S = \Psi$.

Dimostrazione. Proviamo, per cominciare, che Ψ è lineare. Verificheremo la (AL1) lasciando la analoga verifica della (AL2) al lettore. Siano v e w vettori di V. Vogliamo dimostrare che

$$(v + w)^{**} = v^{**} + w^{**}.$$

A tale scopo, osserviamo che, per ogni $f \in V^*$, si ha

$$(v + w)^{**}(f) = f(v + w) = f(v) + f(w) = v^{**}(f) + w^{**}(f) = (v^{**} + w^{**})(f).$$

Per concludere la dimostrazione basta verificare che Ψ_S e Ψ hanno sugli elementi di S gli stessi valori. Poiché per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\Psi_S(v_i) = (v_i^*)^*,$$

occorre provare che

$$(v_i^*)^* = v_i^{**}.$$

Di nuovo, per verificare tale uguaglianza basta accertarsi che i due membri assumono lo stesso valore sugli elementi di S^*. Ma ciò è chiaro, poiché per ogni coppia di interi (i, j) dell'insieme I_n si ha

$$v_i^{**}(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij} = (v_i^*)^*(v_j^*)$$

e ciò è quanto si doveva dimostrare. ▪

L'isomorfismo $\Psi : V \to V^{**}$, che dunque *non* dipende dalla scelta di alcuna base di V, si dice *isomorfismo canonico* di V col suo biduale. In seguito noi penseremo sempre V identificato col suo biduale a mezzo di tale isomorfismo: in tale identificazione un vettore v di V si penserà identificato con v^{**}.

(12.8) *Esempio Spazio duale dello spazio dei vettori numerici su un campo*

Consideriamo un polinomio $f(x_1, \ldots, x_n)$ omogeneo di primo grado su K, cioè un elemento $f \in K[x_1, \ldots, x_n]_1$. Si ha

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Per ogni vettore numerico $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in M(n, K)$ scriveremo

$$f(\mathbf{b}) = f(b_1, \ldots, b_n) = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Consideriamo allora l'applicazione

$$\bar{f} : \mathbf{b} \in M(n, K) \to f(\mathbf{b}) \in K.$$

È ovvio che $\bar{f}$ è lineare e quindi è un elemento di $M(n, K)^*$. Si ha allora l'applicazione

$$\chi : f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]_1 \to \bar{f} \in M(n, K)^*.$$

È facile verificare che χ è una applicazione lineare iniettiva, e quindi è un isomorfismo, poiché i due spazi $K[x_1, \ldots, x_n]_1$ e $M(n, K)^*$ hanno la stessa dimensione n. Mediante tale isomorfismo noi penseremo sempre $K[x_1, \ldots, x_n]_1$ identificato con $M(n, K)^*$. In tale identificazione si ha ovviamente, per ogni $i = 1, \ldots, n$,

$$\mathbf{e}_i^* = x_i$$

dove $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono i vettori della base canonica di $M(n, K)$.

L'identificazione di $M(n, K)$ col suo biduale è ora chiara. Infatti ogni vettore $\mathbf{b} \in M(n, K)$ determina l'applicazione lineare

$$\mathbf{b}^{**} : f \in K[x_1, \ldots, x_n]_1 \to f(\mathbf{b}) \in K$$

che è nulla se e solo se $\mathbf{b} = 0$. Identificando $\mathbf{b}$ con $\mathbf{b}^{**}$ si identifica $M(n, K)$ col duale di $K[x_1, \ldots, x_n]_1$ e cioè col suo biduale.

5. Principio di dualità per gli spazi vettoriali

Si consideri il K-spazio vettoriale V. Per ogni sottospazio W di V definiamo l'*annullatore* di W in V nel seguente modo:

$$\mathrm{Ann}_V(W) = \{f \in V^* : \mathrm{Ker}(f) \supseteq W\} = \{f \in V^* : \text{ per ogni } \mathbf{v} \in W, \text{ sia } f(\mathbf{v}) = 0\}.$$

Sovente scriveremo Ann(W) invece di $\mathrm{Ann}_V(W)$, quando ciò non crei confusione. È facile verificare che, per ogni sottospazio W di V, l'annullatore Ann(W) di W in V è un sottospazio di V^*. Ovviamente si ha

$$\mathrm{Ann}(V) = (0), \quad \mathrm{Ann}((0)) = V^*.$$

Si consideri l'insieme $\mathcal{S}(V)$ costituito da tutti i sottospazi di V. Possiamo definire l'applicazione

$$\mathrm{Ann}_V : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(V^*)$$

accanto alla quale possiamo anche considerare l'applicazione analoga

$$\mathrm{Ann}_{V^*} : \mathcal{S}(V^*) \to \mathcal{S}(V^{**})$$

definita a partire da V^*.

Supponiamo da ora in poi V finitamente generato. Allora V si identifica con V^{**} e quindi $\mathcal{S}(V^{**})$ si identifica con $\mathcal{S}(V)$. Quindi abbiamo l'applicazione

$$\mathrm{Ann}_{V^*} : \mathcal{S}(V^*) \to \mathcal{S}(V).$$

Esplicitamente, se W^* è un sottospazio di V^* si ha

$$\mathrm{Ann}(W^*) = \{\mathbf{v} \in V : \text{ per ogni } f \in W^* \text{ sia } f(\mathbf{v}) = 0\}.$$

(12.9) Proposizione

(a) *Per ogni coppia* (W, W′) *di sottospazi di* V *tali che* $W \subseteq W'$ *si ha* $\mathrm{Ann}(W) \supseteq \mathrm{Ann}(W')$.

(b) *Per ogni sottospazio* W *di* V *si ha*

$$\dim(\mathrm{Ann}(W)) = \dim(V) - \dim(W).$$

Il numero a secondo membro della precedente uguaglianza si dice codimensione *di* W *in* V *e si denota col simbolo* $\mathrm{codim}_V W$ *o semplicemente* codim W *se non vi è luogo ad equivoco.*

(c) *L'applicazione* Ann_V *è biiettiva e* Ann_{V^*} *ne è l'inversa, cioè*

$$\mathrm{Ann}_{V^*} \circ \mathrm{Ann}_V = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(V)}, \quad \mathrm{Ann}_V \circ \mathrm{Ann}_{V^*} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(V^*)}.$$

(d) *Per ogni coppia* (W, W′) *di sottospazi di* V *si ha*

$$\mathrm{Ann}(W + W') = \mathrm{Ann}(W) \cap \mathrm{Ann}(W'), \quad \mathrm{Ann}(W \cap W') = \mathrm{Ann}(W) + \mathrm{Ann}(W').$$

Dimostrazione

(a) Sia $W \subseteq W'$. Se $f \in \mathrm{Ann}(W')$, allora $\mathrm{Ker}(f) \supseteq W' \supseteq W$ e quindi $f \in \mathrm{Ann}(W')$.

(b) Sia $T = [v_1, \ldots, v_m]$ una base di W che possiamo completare a una base $S = [v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n]$ di V. Per mostrare l'asserto basta provare che i vettori v_i^*, $i = m+1, \ldots, n$, generano Ann(W). Osserviamo che questi vettori appartengono a Ann(W) perché assumono valore zero su tutti gli elementi di T. Sia poi f un elemento di Ann(W). Poiché $f \in V^*$, e dunque dipende linearmente da $S^* = [v_1^*, \ldots, v_n^*]$, si ha una relazione del tipo

$$f = \alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*.$$

Poiché stiamo supponendo che $W \subseteq \mathrm{Ker} f$, per ogni $i = 1, \ldots, m$ deve essere

$$0 = f(v_i) = (\alpha_1 v_1^* + \ldots + \alpha_n v_n^*)(v_i) = \alpha_1 v_1^*(v_i) + \ldots + \alpha_n v_n^*(v_i) = \alpha_i$$

il che prova che f è combinazione lineare solo di v_i^*, $i = m+1, \ldots, n$.

(c) È chiaro che per ogni sottospazio W di V si ha $W \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W))$. Poiché gli spazi vettoriali W e Ann(Ann(W)) hanno, per la (b), la stessa dimensione, si ha $W = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W))$. Similmente, per ogni sottospazio W^* di V^*, si ha $W^* = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W^*))$.

(d) Si ha che $f \in \mathrm{Ann}(W) \cap \mathrm{Ann}(W)$ se e solo se $\mathrm{Ker} f \supseteq W \cup W'$ e quindi se e solo se $\mathrm{Ker} f \supseteq W + W'$ ossia se e solo se $f \in \mathrm{Ann}(W + W')$. Ciò prova la prima uguaglianza. Per dimostrare l'altra osserviamo che, applicando quanto già dimostrato, si ha

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W) + \mathrm{Ann}(W')) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W)) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W')) = W \cap W'$$

e quindi

$$\mathrm{Ann}(W \cap W') = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(W) + \mathrm{Ann}(W'))) = \mathrm{Ann}(W) + \mathrm{Ann}(W')$$

cioè l'asserto. ∎

Sia ora P una proposizione che concerne i sottospazi di uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K e che riguardi le loro intersezioni, i loro spazi congiungenti, le loro dimensioni e codimensioni. Diremo *proposizione duale* della P la proposizione P^* ottenuta dalla P sostituendo in P ai termini *spazio intersezione, spazio congiungente, contenuto, contenente, dimensione* e *codimensione* rispettivamente i termini *spazio congiungente, spazio intersezione, contenente, contenuto, codimensione* e *dimensione*. Ovviamente la duale della duale di P è P stessa. Una proposizione P si dice *autoduale* se coincide con la sua duale.

(12.10) *Esempio*

(a) Consideriamo la seguente proposizione P: *In uno spazio vettoriale* V *finitamente generato sul campo* K *due sottospazi distinti di codimensione* 1 *si intersecano in un sottospazio di codimensione* 2. La duale di P è la proposizione P^*: *In uno spazio vettoriale* V *finitamente generato sul campo* K *due sottospazi distinti di dimensione* 1 *hanno per spazio congiungente un sottospazio di dimensione* 2.

(b) La seguente proposizione P è autoduale: *In uno spazio vettoriale* V *di dimensione* 2 *sul campo* K *due sottospazi distinti di dimensione* 1 *si intersecano nel sottospazio nullo e generano* V.

Dimostriamo il seguente:

(12.11) TEOREMA (Principio di dualità per gli spazi vettoriali) *Una proposizione P che concerne i sottospazi di uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo* K *e che riguardi le loro intersezioni, i loro spazi congiungenti, le loro dimensioni e codimensioni è vera se e solo se è vera la duale.*

Dimostrazione. Supponiamo la P vera per ogni spazio vettoriale finitamente generato su K e sia V un tale spazio. La P è allora vera in V^*. Usando l'applicazione Ann_{V^*} e tenendo conto della proposizione (12.9), si trova che la P^* è vera in V. Analogamente, se P^* è vera allora è vera la $(P^*)^* = P$. ∎

Ad esempio le due proposizioni enunciate in (12.10, a) sono entrambe vere. Per dimostrarlo basta verificarne una sola.

6. Trasposta di una applicazione lineare

Siano V e W spazi vettoriali sul campo K e sia $f: V \to W$ una applicazione lineare. Esiste allora (vedi p. 179) l'applicazione lineare

$$\rho_{f,K} : g \in W^* = \mathrm{Hom}(W, K) \to g \circ f \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$$

che denotiamo anche col simbolo f^t e chiamiamo *trasposta* di f. Si ha quindi

$$f^t(g) = g \circ f.$$

Proviamo la:

(12.12) PROPOSIZIONE

(a) *Se* V, W *e* Z *sono* K-*spazi vettoriali finitamente generati e* $f: V \to W$ *e* $g: W \to Z$ *sono applicazioni lineari, si ha*

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t.$$