Cenni quadriche proiettive

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (con $\mathbb{K}$ principalmente $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$)
$\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$

$[\underline{X}] = [x_0, \dots, x_n]$ coordinate omogenee di $\mathbb{P}^n$

Definizione 1

$\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ si dice <u>quadrica proiettiva</u> se è classe di proporzionalità definita da un polinomio

$$f(x_0, \dots, x_n)$$

omogeneo e di grado 2

cioè $\quad \Gamma = [\, f(x_0, \dots, x_n)\,]$

Scelto un rappresentante, e.g. $f(x_0, \dots, x_n)$, allora

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0 \qquad (1.1)$$

è <u>equazione cartesiana di Γ</u>

e il <u>supporto di Γ</u> è

$$\operatorname{Supp}(\Gamma) = \{ [P] = [p_0, \dots, p_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(p_0, \dots, p_n) = 0 \}$$

<u>Oss</u> (1) Se $n = 2$ ritroviamo le <u>coniche proiettive</u>

(2) è una buona definizione perché f è omogeneo di grado 2

$$[P] = [p_0, \dots, p_n] = [\lambda p_0, \dots, \lambda p_n]$$

e

$$f(\lambda p_0, \dots, \lambda p_n) = \lambda^2 f(p_0, \dots, p_n)$$

(3) $\forall \ \alpha \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $f(x_0, \dots, x_n)$ e $\alpha f(x_0, \dots, x_n)$ definiscono la stessa quadrica Γ.

Come per le coniche, siccome si considera

$$x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i \qquad 0 \leq i \neq j \leq n$$

scriviamo sempre ($char(\mathbb{K}) \neq 2$)

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_n) &= a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + \\ &\quad + 2a_{01} x_0 x_1 + \dots + 2a_{0n} x_0 x_n + \\ &\quad + \dots + 2a_{n-1,n} x_{n-1} x_n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

Pertanto, essendo $f(x_0, \dots, x_n)$ una forma quadratica, posso associare a $f(\underline{x})$ la matrice simmetrica

$$A_f = (a_{ij}) \in Sym(n+1 \times n+1; \mathbb{K})$$

cosicché

$$\boxed{f(\underline{x}) = \underline{x}^t A_f \underline{x}}$$

<u>Oss</u> Se Γ quadrica proiettiva è individuata da un'altra forma quadratica rappresentante cioè

$$\alpha \cdot f(\underline{x}) \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{K}^*$$

allora

$$A_{\alpha f} = (\alpha \cdot a_{ij}) = \alpha \cdot A_f \,, \quad \alpha \in \mathbb{K}^*$$

cioè due rappresentanti di una medesima Γ danno matrici simmetriche rappresentative proporzionali

Pertanto, dato una quadrica $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$, scegliendo un'equazione cartesiana

$$f(\underline{x}) = 0$$

considero $A_f \in Sym((n+1)\times(n+1); \mathbb{K})$ e posso scrivere l'equazione cartesiana:

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^t A_f \, \underline{x} = 0 \qquad (1.2)$$

<u>Definizione 2</u> e nomino $A := A_f$ <u>matrice simmetrica associata a Γ</u>

visto che Γ è in biiezione con

$$[f] = [\alpha f] \quad e \quad [A_f] = [A_{\alpha f} = \alpha A_f]$$

<u>Definizione 3</u> Data Γ quadrica di $\mathbb{P}^n$ e presa $f(\underline{x}) = 0$ una sua equazione cartesiana, i.e.

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^t A_f \, \underline{x} = 0$$

Considero la <u>forma bilineare simmetrica detta forma polare associata a f</u>

$$\Omega_f : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\underline{x}, \underline{y}) \longrightarrow \Omega_f(\underline{x}, \underline{y})$$

dove

$$\Omega_f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t \circ A_f \circ \underline{y} = \underline{y}^t \circ A_f \circ \underline{x}$$

dove la seconda eguaglianza discende dal fatto che A_f simmetrica

$$(\underline{x}^t \circ A_f \circ \underline{y})^t = \underline{y}^t \circ A_f^t \circ (\underline{x}^t)^t = \underline{y}^t \circ A_f^t \circ \underline{x} \underset{\substack{\downarrow \\ A_f \text{ simmetrica}}}{=} \underline{y}^t \circ A_f \circ \underline{x}.$$

Oss Ovviamente vale l'identità di Eulero, i.e.

$$\Omega_f(\underline{x}, \underline{x}) = f(\underline{x})$$

cioè Ω_f ha come forma quadratica associata f.

Domanda se si ha una proiettività di $\mathbb{P}^n$, come cambia la matrice associata ad una quadrica?

Sia

$$\rho \underline{X} = M \underline{y} \quad \text{equazione proiettività}$$

con $M \in GL(n+1; \mathbb{K})$ e $\rho \in \mathbb{K}^*$

Sia $\mathcal{T}: \quad \underline{x}^t A \underline{x} = 0$ eq. cartesiana

Poiché $\underline{X} = \frac{1}{\rho} M \underline{y} \Rightarrow$

$$\underline{x}^t A \underline{x} = \left(\tfrac{1}{\rho} M \underline{y}\right)^t A \left(\tfrac{1}{\rho} M \underline{y}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\underline{y}^t M^t A M \underline{y}\right)$$

Poiché $\frac{1}{\rho^2} \in \mathbb{K}^*$, un'equazione cartesiana di $\mathcal{T}$ nelle coordinate omogenee $[\underline{y}] = [y_0, \dots, y_n]$ è

$$0 = \underline{y}^t (M^t A M) \underline{y}$$

cioè <u>la matrice simmetrica rappresentativa di $\mathcal{T}$ nelle coordinate $\underline{y}$ è</u>

$$\boxed{B := M^t A M} \qquad (1.3)$$

Infatti è simmetrica perché

$$B^t = (M^t A M)^t = M^t A^t M \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ simm.}}}{=} M^t A M$$

Osservazioni dc (1.3)

(i) $\det(B) = \det(A)\cdot(\det(M))^2$ per Binet e per il fatto che $\det(M) = \det(M^t)$ da Laplace

(ii) Visto che $M \in GL(n+1; \mathbb{K})$ perché matrice di una proiettività, allora

$$rg(A) = rg(B)$$

Pertanto, poiché non dipende né dal rappresentante $f(\underline{x}) = 0$ o $\alpha f(\underline{x}) = 0$ $\left(\begin{array}{c} rg(A_f) = rg(\alpha A_f) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K}^* \end{array} \right)$

né da cambiamenti di coordinate omogenee
($rg(A) = rg(B)$, $\forall M \in GL(n+1, \mathbb{K})$ e $\forall \rho \in \mathbb{K}^*$)
si può definire

$$(1.4) \quad \boxed{rg(\mathcal{T}) := rg(A) = rg(f) = rg(\Omega_f)}$$

(iii) $\mathcal{T}$ individua Ω_f, dopo che si è fissata l'equazione cartesiana $f(\underline{x}) = 0$, solo a meno di un $\rho \in \mathbb{K}^*$.

Dalla definizione (1.4) si può porre

<u>Definizione 4</u> Data $\mathcal{T}$ quadrica di $\mathbb{P}^n$, essa si dice

<u>non-degenere</u> se $rg(\mathcal{T}) = n+1$

<u>degenere</u> se $rg(\mathcal{T}) \leq n$

Esempi

(1) Se $n=2$, ritroviamo le cose studiate per le coniche proiettive

(2) Se $n=1$ quadriche di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

$$\mathcal{T}': f(x_0,x_1) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 = 0$$

(2.a) Se $[1,0] \in \mathrm{Supp}(\mathcal{T}') \Rightarrow a_{00}=0$

$\Rightarrow f(\underline{x}) = 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 \Rightarrow$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ e } \det(A_f) = -a_{01}^2$$

mentre

$$f(\underline{x}) = x_1 \cdot (2a_{01}x_0 + a_{11}x_1) = 0$$

- Se $a_{01}=0 \Rightarrow \det(A_f)=0 \Rightarrow \mathcal{T}'$ è degenere e, poiché $a_{11}\neq 0$,

  $f(\underline{x}) = a_{11}x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 0 \Leftrightarrow$

  $\mathrm{Supp}(\mathcal{T}') = \{[1,0]\}$ ma contato con molteplicità due

- Se $a_{01}\neq 0$ $\det(A_f)\neq 0 \Rightarrow rg(\mathcal{T}')=2$

  $\Rightarrow \mathcal{T}'$ non degenere e

$$f(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ cioè } [1,0] \in \mathrm{supp}(\mathcal{T}') \\ 2a_{01}x_0 + a_{11}x_1 = 0 \text{ cioè } [a_{11}, -2a_{01}] \in \mathrm{supp}(\mathcal{T}') \end{cases}$$

Quindi $\mathrm{Supp}(\mathcal{T}')$ sono due punti distinti

(2.b) Se invece $[1,0] \notin Supp(\Gamma')$ $\Rightarrow$

$f(1,0) \neq 0 \Rightarrow$ posso dividere per x_1^2 il polinomio omogeneo $f(x_0, x_1)$ ponendo

$$t := \frac{x_0}{x_1}$$

e si ottiene

$$(*) \quad a_{00}t^2 + 2a_{01}t + a_{11} = 0$$

Il discriminante dell'equazione $(*)$ è

$$\Delta = 4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11} = -4\det(A_f)$$

- Se $\det(A_f) = 0$ $\Rightarrow$ Γ' degenere e $(*)$ ha due soluzioni coincidenti, cioè

  $Supp(\Gamma') = \{P\}$ dove P è un punto contato con molteplicità due

- Se $\det(A_f) \neq 0$ $\Rightarrow$ Γ' è non-degenere

Pertanto

se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $Supp(\Gamma') = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

se $\Delta > 0 \Leftrightarrow \det(A_f) < 0$, $Supp(\Gamma') = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \neq P_2 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

se $\Delta < 0 \Leftrightarrow \det(A_f) > 0$, $Supp(\Gamma') = \emptyset$

Definizione 5

Una quadrica Γ di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, di equazione cartesiana

$$f(\underline{x}) = 0$$

si dice

<u>riducibile</u> se $f(\underline{x}) = g(\underline{x}) \cdot h(\underline{x})$ con g e h polinomi omogenei di grado uno altrimenti Γ si dice <u>irriducibile</u>

Se consideriamo Γ riducibile allora

$$H_g := \{ P \in \mathbb{P}^n \mid g(P) = g(p_0, -, p_n) = 0 \}$$

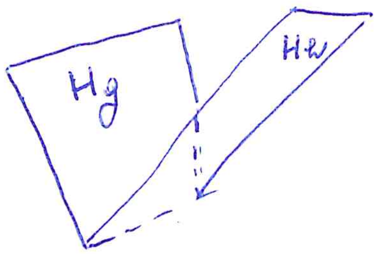
$$H_h := \{ P \in \mathbb{P}^n \mid h(P) = h(p_0, -, p_n) = 0 \}$$

sono <u>iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$</u>

Γ è quindi unione di due iperpiani che vengono chiamati <u>componenti irriducibili di Γ</u>

e si scrive

$$\underline{\Gamma = H_g + H_h}$$



Se inoltre $H_g = H_h$, cioè $h = \alpha \cdot g$, per qualche $\alpha \in \mathbb{K}^*$ e quindi $f(\underline{x}) = \alpha \cdot (g(\underline{x}))^2$ con $g(\underline{x})$ polinomio omogeneo di grado uno, allora

$$\underline{\Gamma = 2 H_g}$$

e H_g si dice <u>componente irriducibile di molteplicità due per Γ</u>

Commenti

(1) Per $n = 1$ abbiamo visto che ogni quadrica di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è riducibile

Nel caso (2.a) con $a_{01} = 0$ oppure (2.b) con $\det(A_f) = 0$ abbiamo una unica componente irriducibile di molteplicità due

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ non è vero che tutte le quadriche di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ sono riducibili perché per $\Delta < 0$ nel caso (2.b) si ha che $Supp(\Gamma) = \emptyset$ e non è vero che il polinomio $(*)$ si spezza come prodotto di binomi

(2) Per $n = 2$ ritroviamo che le coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ riducibili o sono unione di due rette proiettive distinte (necessariamente incidenti) oppure hanno supporto costituito da una sola retta, di molteplicità due (retta doppia)

Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ questa affermazione non è vera

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ è conica vuota
- $x_0^2 + x_1^2 = 0$ è conica puntiforme
  il supporto è $[0, 0, 1]$ punto doppio

Lemma 6

Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ con $n \geq 2$. Allora ogni quadrica riducibile è degenere.

Più precisamente

$$\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \text{ riducibile}, n \geq 2 \Leftrightarrow rg(\Gamma) \leq 2$$

e

$rg(\Gamma) = 1 \Leftrightarrow \Gamma = 2H$, per qualche iperpiano $H \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

$rg(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \Gamma = H_g + H_h$ con $H_g \neq H_h$ come iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

In particolare, ogni Γ riducibile contiene un ~~iperpiano~~

Corollario 7

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ conica

Allora Γ è riducibile $\Leftrightarrow$ è degenere

Inoltre

$rg(\Gamma) = 1 \Leftrightarrow \Gamma$ è retta doppia

$rg(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \Gamma$ è unione di due rette distinte (necessariamente incidenti)

dim Corollario 7

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è t.c. $rg(\Gamma) \leq 3$

Se $rg(\Gamma) = 3 \Rightarrow \Gamma$ conica non degenere

Pertanto $rg(\Gamma) \leq 2$ sono le degeneri

e poi si usa Lemma 6 ∎

dimostrazione Lemma 6

Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ riducibile, $n \geq 2$. Allora è della forma

$$\Gamma = H_1 + H_2$$

H_1 e H_2 opportuni iperpiani di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

A meno di una proiettività, che manda iperpiani in iperpiani, si può assumere di avere coord. omogenee $[\underline{X}] = [x_0, \dots, x_n]$ t.c.

$$H_1 : \quad x_0 = 0$$

Sia $\quad H_2 : \quad a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$ in tali coordinate

Allora Γ ha equazione cartesiana in tali coordinate

$$f(\underline{x}) = a_0 x_0^2 + a_1 x_0 x_1 + \dots + a_n x_0 x_n = 0$$

quindi

$$A_f = \begin{pmatrix} a_0 & a_1/2 & a_2/2 & \cdots & a_n/2 \\ a_1/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n/2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$rg(A_f) \leq 2 \quad \text{sempre e che}$$

$$rg(A_f) = 1 \iff H_1 = H_2 \quad \text{cioè } \Gamma: x_0^2 = 0$$

$$rg(A_f) = 2 \iff \Gamma = H_1 + H_2 \quad \text{cioè } H_1 \neq H_2$$

Viceversa, se $rg(\Gamma) \leq 2$ allora, presa una equazione cartesiana

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x} = 0$$

si può ridurre alla forma canonica su $\mathbb{C}$ della forma quadratica $f(\underline{x})$

Questo comporta un cambiamento di coordinate omogenee

$$\rho \underline{X} = M \underline{Y}$$

dove la forma canonica diventa

$Y_0^2 = 0$, cioè T' di rango 1 e $T' = 2H_0$
dove H_0 l'iperpiano $Y_0 = 0$

oppure

$Y_0^2 + Y_1^2 = 0$ cioè T' di rango 2 e
$T' = H_1 + H_1$, $H_1 \neq H_2$ gli
iperpiani

$H_1 : Y_0 + i Y_1 = 0$

$H_2 : Y_0 - i Y_1 = 0$. ▪

Intersezioni di una quadrica Γ con una retta di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Ci focalizziamo su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n \geq 2$

$$\Gamma : \ f(\underline{x}) = \underline{x}^t A_f \underline{x} = 0$$

$$\Omega_f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t A_f \underline{y} \quad \text{è forma polare}$$

Siano $\underline{P}, \underline{q} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ punti con $\underline{P} \neq \underline{q}$ e sia

$$r := \langle \underline{P}, \underline{q} \rangle \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \quad \text{retta per i due punti}$$

$$\Downarrow$$

r ha equazioni omogenee parametriche

$$\underline{X} = \lambda \underline{P} + \mu \underline{q}, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

cioè

$$\begin{cases} x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = \lambda p_n + \mu q_n \end{cases} \qquad \text{se } [\underline{X}] = [x_0, \dots, x_n], \ [\underline{P}] = [p_0, \dots, p_n], \ [\underline{q}] = [q_0, \dots, q_n]$$

Allora

$$\boxed{r \cap \Gamma : \ f(\lambda \underline{P} + \mu \underline{q}) = 0} \qquad (1.8)$$

cioè

$$f(\lambda p_0 + \mu q_0, \lambda p_1 + \mu q_1, \dots, \lambda p_n + \mu q_n) = 0$$

che è un polinomio omogeneo, di grado due nelle indeterminate omogenee $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Per trovare $r \cap \Gamma$ cerco i $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ che azzerano (1.8)

Ora

$$0 = f(\lambda \underline{P} + \mu \underline{q}) = (\lambda \underline{P} + \mu \underline{q})^t \circ A_f (\lambda \underline{P} + \mu \underline{q}) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vale bilinearità} \\ \text{più } A_f \text{ simmetrica}}}{=}$$

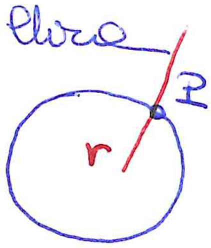
$$= \lambda^2 (\underline{P}^t A_f \underline{P}) + 2\lambda\mu (\underline{P}^t A_f \underline{q}) + \mu^2 (\underline{q}^t A_f \underline{q})$$

$$= \lambda^2 f(\underline{P}) + 2\lambda \circ \mu \circ \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu^2 f(\underline{q})$$

In definitiva cerchiamo le soluzioni $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dell'equazione omogenea di secondo grado:

$$(1.9) \quad \boxed{\lambda^2 f(\underline{P}) + 2\lambda\mu\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu^2 f(\underline{q}) = 0}$$

- <u>Se $[\lambda, \mu] = [1, 0]$ è soluzione di (1.9)</u> allora



$$f(\underline{P}) = 0 \iff P \in \Gamma$$

Ma allora (1.9) diventa

$$2\lambda\mu\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu^2 f(\underline{q}) = 0$$

cioè

$$\mu\, (2\lambda\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu f(\underline{q})) = 0$$

Pertanto

* $\mu = 0 \Rightarrow [\lambda, \mu] = [1, 0]$ e fornisce $P \in r \cap \Gamma$

* $2\lambda\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu f(\underline{q}) = 0$ fornisce l'eventuale altro punto di azzeramento di (1.9) cioè un altro punto in $r \cap \Gamma$, eventualmente coincidente con P.

• Se invece $[1,0]$ non è soluzione di (1.9) $\Rightarrow$

$\mu \neq 0$ e posso dividere (1.9) per μ^2 ottenendo

con $t := \frac{\lambda}{\mu}$, l'equazione non omogenea

$$(*) \quad \boxed{t^2 f(\underline{P}) + 2t\,\Omega_f(\underline{P},\underline{Q}) + f(\underline{Q}) = 0}$$

il cui discriminante è

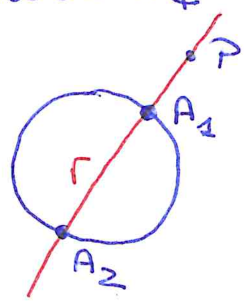
$$\Delta = 4\,\Omega_f(\underline{P},\underline{Q})^2 - 4 f(\underline{P})\cdot f(\underline{Q})$$

* Se $\Delta \neq 0$ poiché $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\operatorname{Supp}(r \cap \Gamma) = \{A_1, A_2\}$$

con A_1 e A_2 due punti distinti di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

e si pone la molteplicità di intersezione della retta r con Γ in questi punti come



$$\operatorname{mult}_{A_i}(r \cap \Gamma) = 1, \quad i = 1,2$$

cioè $r \cap \Gamma = \{A_1, A_2\}$, $A_1 \neq A_2$

* Se $\Delta = 0$

Caso 1 se $f(\underline{P}) = \Omega_f(\underline{P},\underline{Q}) = f(\underline{Q}) = 0$

allora ogni $[\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è soluzione

perché anche $[1,0]$ lo sarebbe

$\Rightarrow$ $r \subset \Gamma$ la retta è tutta contenuta

Caso 2 se $(f(P), \Omega_f(P,Q), f(Q)) \neq (0,0,0)$

ma $\Delta = 0$ allora (*) due radici coincidenti

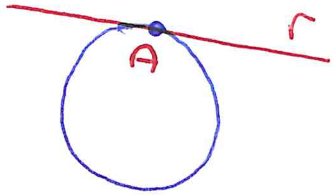
e

$$\mathrm{Supp}(r \cap \Gamma) = \{A\}$$

con

$$\mathrm{mult}_A(r \cap \Gamma) = 2$$

cioè $r \cap \Gamma = \{2A\}$ è quadrica degenere su $r \equiv \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$



In particolare si è dimostrato il

Teorema di Bezout in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ con $n \geq 2$

Siano r retta e Γ quadrica di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 2$

Allora $r \cap \Gamma \neq \emptyset$ sempre

Se inoltre $r \not\subset \Gamma$ allora $r \cap \Gamma$ è composta da al più due punti e la somma molteplicità di intersezioni è sempre due

Corollario 10 Sia $n \geq 2$ e sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una quadrica

(a) Ogni retta $r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ interseca Γ in almeno un punto

(b) Ogni quadrica $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ha infiniti punti

dim (a) Segue dal Teorema di Bezout

(b) Poiché in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ esistono infinite rette non incidenti solo in un numero finito di punti, allora segue da (a) $\blacksquare$

Osservazione le asserzioni sono false se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
La conica vuota e la conica puntiforme non incontrano tutte le rette di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Le precedenti osservazioni permettono di fornire la seguente:

Definizione 11

Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 2$, una quadrica e sia $P \in \Gamma$ un punto.

Il punto P si dirà <u>punto doppio o singolare per Γ</u> se per ogni retta $r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ passante per P si ha che

$$o \quad r \subset \Gamma \quad \text{oppure} \quad \text{mult}_P(r \cap \Gamma) = 2$$

Un punto P non singolare per Γ si dice <u>punto semplice o liscio per Γ</u>

Esempi

Se $n = 2$ considero $\Gamma: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ non degenere

$P = [0, 1, 1] \in \Gamma$

La retta $r_1: x_1 - x_2 = 0$ passa per P e

$$r_1 \cap \Gamma: \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0^2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{mult}_P(r_1 \cap \Gamma) = 2$$

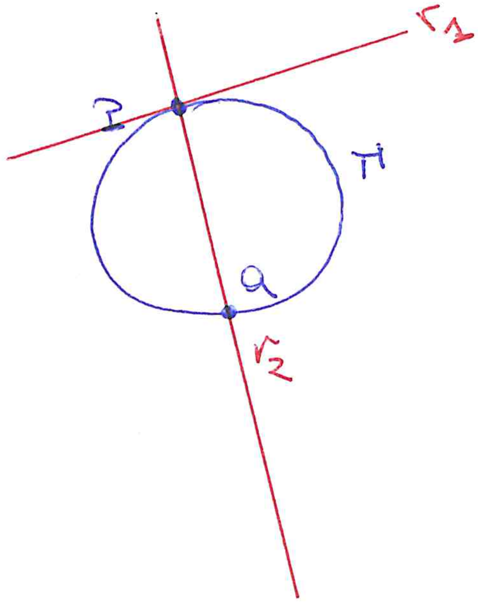
Però $r_2: x_0 + x_1 - x_2 = 0$ è un'altra retta per P e

$$r_2 \cap \Gamma: \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_0 + x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_0x_1 = 0 \\ x_0 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

Se $x_0 = 0$ si ha $[0, 1, 1] = P \in r_2 \cap \Gamma$

Se $x_1 = 0$ si ha $[1, 0, 1] = Q \in r_2 \cap \Gamma$ e $P \neq Q$

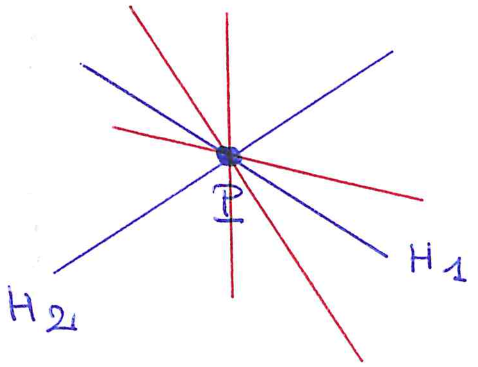
cioè $r_2 \cap \Gamma = \{P, Q\}$ e P semplice per Γ.



Invece se prendiamo $\Gamma': x_1^2 - x_2^2 = 0$ allora

$\Gamma' = H_1 + H_2$ dove $H_1: x_1 - x_2 = 0$

$H_2: x_1 + x_2 = 0$



$P = [1, 0, 0] \in \Gamma'$

e ogni retta r per P è t.c. $\text{mult}_P(r \cap \Gamma') = 2$

perchè $\text{mult}_P(r \cap H_1) = 1$ e $\text{mult}_P(r \cap H_2) = 1$

$\Rightarrow$ P punto doppio per Γ'.

Definizione 1.2

Data $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ una quadrica, $n \geq 2$, si pone

$$\boxed{Sing(\Gamma) := \{\underline{P} \in \Gamma \mid \underline{P} \text{ singolare per } \Gamma\}}$$

che viene detto luogo singolare di Γ

Una quadrica Γ si dice non-singolare o liscia se $Sing(\Gamma) = \emptyset$

Si dice singolare se $Sing(\Gamma) \neq \emptyset$

Come mi accorgo che $\underline{P} \in \Gamma$ è punto singolare?

Prendo $\underline{P} \in \Gamma$ e un qualunque $\underline{q} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $\underline{q} \neq \underline{P}$

Considero la retta

$$r = \langle \underline{P}, \underline{q} \rangle \Rightarrow r: \underline{x} = \lambda \underline{P} + \mu \underline{q}$$

Poi considero

$$r \cap \Gamma: f(\lambda \underline{P} + \mu \underline{q}) = 0$$

Da (1.9) questo è

$$\lambda^2 f(\underline{P}) + 2\lambda\mu\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu^2 f(\underline{q}) = 0$$

Ma poiché $\underline{P} \in \Gamma \Rightarrow f(\underline{P}) = 0$. Quindi diventa

$$\boxed{\mu\,[2\lambda\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu f(\underline{q})] = 0} \quad (*)$$

Poiché $\underline{P} \in r \cap \Gamma$ corrisponde a $\mu = 0$, allora riusciamo a caratterizzare $Sing(\Gamma)$ e capire come questi punti sono disposti.

Proposizione 13

Sia $n \geq 2$, $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ quadrica di equazione cartesiana $f(\underline{x}) = 0$ e $A := A_f$ matrice simm. associata. Sia $\underline{P} \in \Gamma$ punto.

(a) $\underline{P} \in \Gamma$ è punto doppio (singolare) per $\Gamma \iff$

$$A \cdot \underline{p} = 0$$

(b) $\mathrm{Sing}(\Gamma)$, se non vuoto, è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ di dimensione pari a $n - rg(\Gamma)$

(c) In particolare Γ è singolare se e solo se è degenere

dim (a) $\underline{P} \in \Gamma$ è doppio per Γ se e solo se la soluzione $\mu = 0$ è radice doppia dell'equazione (*) cioè

$$\Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) = 0, \ \forall \underline{q} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

cosicché (*) diventa

$$\mu^2 \circ f(\underline{q}) = 0 \iff \mu = 0 \text{ con molteplicità due}$$

Ma dire $\Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) = 0 \ \forall \underline{q} \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, vuol dire che il polinomio

$$\Omega_f(\underline{P}, \underline{x})$$

con $[\underline{x}] = [x_0, -, x_n]$ è identicamente nullo come polinomio, cioè

$$0 \equiv \Omega_f(\underline{P}, \underline{x}) = \underline{P}^t A \underline{x}$$

Ma allora vuol dire che tutti i coefficienti sono nulli cioè

$$\underline{P}^t \cdot A = (0, -, 0).$$

Ma poichè A è simmetrica si ha che

$$\underline{P}^t \circ A = (0, -, 0) \Leftrightarrow A \circ \underline{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\underline{P} \in Ker(A) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ come vettore

(b) In (a) abbiamo dimostrato che

$$Sing(\Gamma) = \mathbb{P}(Ker(A)) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

Poichè $rg(\Gamma) = rg(A) \Rightarrow$ da teorema nullità più rango

$$dim(Ker(A)) = dim(\mathbb{C}^{n+1}) - rg(A)$$
$$= n + 1 - rg(\Gamma)$$

$$\Rightarrow dim(\mathbb{P}(Ker(A))) = n - rg(\Gamma)$$

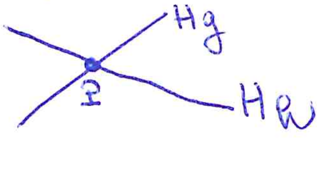
(c) Γ singolare $\Leftrightarrow Sing(\Gamma) \neq \emptyset \Leftrightarrow$
$dim(\mathbb{P}(Ker(A))) \geq 0 \Leftrightarrow rg(\Gamma) \leq n$. ■

<u>Corollario 14</u>

(a) $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è conica non singolare $\Leftrightarrow rg(\Gamma) = 3 \Leftrightarrow$ Γ non-degenere

(b) $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è singolare allora è riducibile

(i) <u>o $rg(\Gamma) = 2$</u>, cioè $\Gamma = H_g + H_h$ 2 rette distinte e si dice <u>semplicemente degenere</u> e $sing(\Gamma) = H_g \cap H_h$

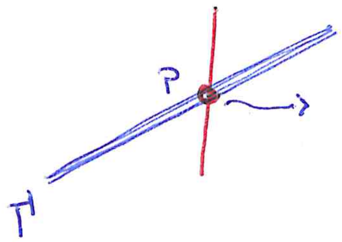


(ii) oppure $rg(\Gamma)=1$ cioè $\Gamma = 2H_g$

cioè Γ è una retta doppia e

$Sing(\Gamma)=\Gamma$, cioè ogni retta $r \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

con $r \neq H_g$ interseca Γ in un punto doppio



$mult_P(r \cap \Gamma)=2$

(c) $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è singolare $\Leftrightarrow$ è degenere $\Leftrightarrow$ è riducibile $\Leftrightarrow$ contiene una retta.

Notare che per $n \geq 3$ la (c) è falsa

Consideriamo $\Gamma \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ di equazione cartesiana

$$\Gamma: \; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P=[1,0,0,0] \in \Gamma$ e $P \in \ker A \Rightarrow P$ singolare per Γ

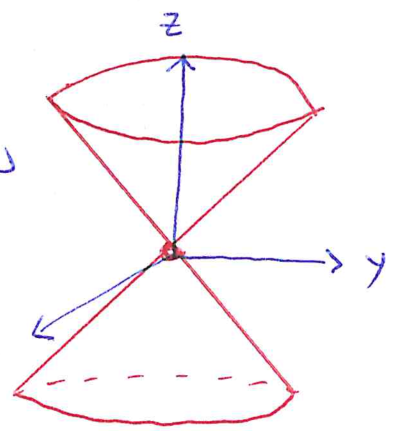
Nella carta affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ con $x=\frac{x_1}{x_0}$, $y=\frac{x_2}{x_0}$, $z=\frac{x_3}{x_0}$

$\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} = \{[x] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \mid x_0 \neq 0\}$

la traccia di Γ è

$$x^2+y^2-z^2=0$$

Se taglio con piani $z=k$ si ottiene



cioè è un cono di vertice $O=(0,0,0)$

che in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ corrisponde a $P=[1,0,0,0]$

$Sing(\Gamma)=\{P\}$ ma Γ non contiene piani.

Precisamente si ha:

Proposizione 15

Sia $n \geq 2$ e $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ quadrica.

Allora

(i) $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ riducibile $\Leftrightarrow rg(\Gamma) \leq 2$

e più precisamente

(i.a) $rg(\Gamma) = 1 \Leftrightarrow \Gamma = 2H$ con $H \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ iperpiano

(i.b) $rg(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \Gamma = H_g + H_h$, con $H_g \neq H_h$ iperpiani in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

(ii) $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ irriducibile $\Leftrightarrow rg(\Gamma) \geq 3$

Inoltre

(ii.a) Γ non-singolare irriducibile $\Leftrightarrow$ $rg(\Gamma) = n+1$

(ii.b) Γ di $rg(\Gamma) = k$ con $3 \leq k \leq n$

Allora Γ è cono di vertice il sottosp. proj. $Sing(\Gamma)$ su una quadrica non-degenere $\Gamma_Z \subset Z$ in un sottospazio proiettivo $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ complementare a $Sing(\Gamma)$.

dim

(i) Questo è esattamente quanto dimostrato in Lemma 6

(ii) Da (i) la riducibilità è equivalente a $rg(\Gamma) \leq 2$. Perciò Γ irriducibile $\Leftrightarrow rg(\Gamma) \geq 3$

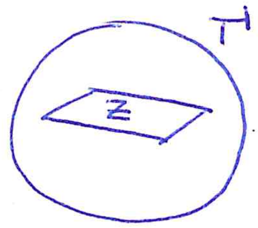
Se $rg(\Gamma') = n+1 \Rightarrow \Gamma'$ è non-degenere e $Ker(A) = \{0\} \Rightarrow Sing(\Gamma') = \emptyset$

Viceversa $Sing(\Gamma') = \emptyset \Rightarrow Ker\, A = \{0\} \Rightarrow$ $rg(A) = n+1 = rg(\Gamma')$ per teorema di nullità più rango.

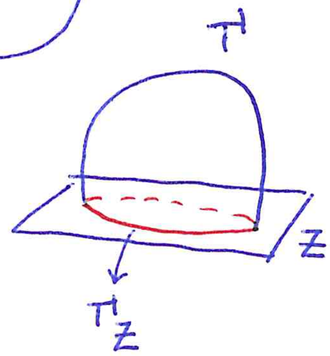
Per dimostrare (ii.b) osserviamo che se $\Gamma' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è quadrica e $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è sottospazio proiettivo allora

$$\Gamma'_Z := \Gamma' \cap Z \text{ è t.c.}$$

o $\Gamma'_Z = Z$ se $Z \subset \Gamma'$



oppure $\Gamma'_Z \subset Z$ è quadrica di Z



Infatti, a meno di proiettività, si può supporre $Z: \begin{cases} x_0 = 0 \\ \vdots \\ x_s = 0 \end{cases}$, $0 \leq s < n$

e se $\Gamma': f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \Rightarrow$

$$\Gamma'_Z : f(0,0,\ldots,0,x_{s+1},\ldots,x_n) = 0$$

è comunque una quadrica in Z.

Supponiamo allora

$$\Gamma: f(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x} = 0$$

con $k := rg(\Gamma) = rg(A) \in \{3, \dots, n\}$

A meno di proiettività, la sua forma canonica è

$$\Gamma: x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{k-1} = 0$$

e $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ degenere

Vediamo caso limite $rg(\Gamma) = 3 = k$ cioè

$$\Gamma: x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

Poiché
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sing}(\Gamma) = \underbrace{\langle [0,0,0,1,0,\dots,0]; \dots, [0,0,\dots,0,1] \rangle}_{\cong\ \mathbb{P}^{n-3}}$$

e $\mathrm{Sing}(\Gamma) = \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Se prendiamo un $\mathbb{P}^2$ sghembo a $\mathrm{Sing}(\Gamma)$

$$Z: \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma_Z = \Gamma \cap Z: \begin{cases} x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

e $\Gamma_Z \subset Z \cong \mathbb{P}^2$ con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$

$\Rightarrow \Gamma_Z$ non degenere in $Z \cong \mathbb{P}^2$ $(\mathrm{Sing}(\Gamma) \cap Z = \emptyset)$

$\Gamma_Z \subset Z$ è quindi irriducibile

cioè $f|_Z \neq h \cdot g$ con h e g polinomi lineari in $[x_0, x_1, x_2] \Rightarrow f$ è irriducibile

$\Rightarrow \Gamma$ è irriducibile $\Rightarrow rg(\Gamma) \geq 3$

Ora, per ogni punto $\underline{P} \in Sing(\Gamma)$

e per ogni punto $\underline{q} \in \Gamma_Z \subset Z$

$r_{P,q} = \langle \underline{P}, \underline{q} \rangle \subset \Gamma$ perché

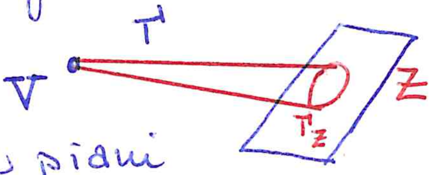
$mult_P(r_{P,q} \cap \Gamma) = 2$ e $mult_q(r_{P,q} \cap \Gamma) = 1$

$\Rightarrow$ r e Γ hanno 3 intersezioni $\Rightarrow r \subset \Gamma$. ■

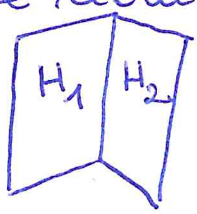
Esempio

In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ con $rg(\Gamma) = k$

- $k = 4$ Γ non-degenere, irriducibile non singolare
- $k = 3$ semplicemente degenere: Γ cono di vertice un punto V che proietta una conica non singolare su un $\mathbb{P}^2 = Z$ non contenente V
  $Sing(\Gamma) = V$



- $k = 2$ doppiamente degenere: Γ unione di due piani è riducibile, degenere e



$Sing(\Gamma) = H_1 \cap H_2$

- $k = 1$ triplamente degenere: $\Gamma = 2H$ è riducibile, degenere è un piano con molteplicità 2 e $Sing(\Gamma) = H$

Definizione 16 Sia $n \geq 2$

Sia $P \in \Gamma$ un punto semplice di $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Una $r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ retta passante per P si dice retta tangente a Γ in P

se

- o $r \subset \Gamma$
- oppure $\operatorname{mult}_P(r \cap \Gamma) = 2$ (e allora r non incontra altrove Γ)

Theorema 17 Sia $n \geq 2$

$P \in \Gamma$ punto semplice di una quadrica Γ in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

L'insieme delle rette tangenti a Γ in P forma un iperpiano di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ di equaz. cartesiana

$$T_P(\Gamma) : \boxed{\underline{P}^t A \underline{x} = 0}$$ iperpiano tg. a Γ in P

dim una retta $r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ avere $\operatorname{mult}_P(r \cap \Gamma) = 2 \iff$

$$\Omega_f(\underline{P}, \underline{x}) \equiv \underline{0} \iff \underline{P}^t A \underline{x} = \underline{0} \quad \blacksquare$$

Corollario 18

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e $\underline{P} \in \Gamma$ punto semplice della conica.

$\exists !$ retta tg. a Γ nel fascio di rette di centro $\underline{P}$

ed è la retta di equazione cartesiana

$$\underline{P}^t A \underline{x} = 0 = f_0(\underline{P}) X_0 + f_1(\underline{P}) X_1 + f_2(\underline{P}) X_2$$

dove

$$f_0(\underline{P}) = (a_{00} P_0 + a_{01} P_1 + a_{02} P_2) \qquad f_2(\underline{P}) = a_{02} P_0 + a_{12} P_1 + a_{22} P_2$$

$$f_1(\underline{P}) = (a_{01} P_0 + a_{11} P_1 + a_{12} P_2)$$

Osservazione

Se $U_0 = [1,0,0]$ è punto fondamentale e $U_0 \in \Gamma$ allora

U_0 è semplice per $\Gamma \iff$ la 1^a riga di A (equivalentemente la 1^a colonna di A) non è identicamente nulla, altrimenti si avrebbe

$$\begin{cases} f_0(U_0) = 0 \\ f_1(U_0) = 0 \\ f_2(U_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{non esisterebbe retta tangente}$$

Analogo discorso per $U_1 = [0,1,0]$ e $U_2 = [0,0,1]$

Definizione 19

Sia $n \geq 2$, $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ quadrica, $P \in \Gamma$ punto semplice. Un sottospazio $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ si dice <u>tangente a Γ nel punto semplice $P \in \Gamma$</u> se $P \in Z \subset T_P(\Gamma)$

Osservazione Sia Z tangente a Γ in $P \in \Gamma$ semplice

$\Rightarrow P \in Z \subset T_P(\Gamma)$

Consideriamo $P \in \Gamma_Z := \Gamma \cap Z \subseteq Z$ perché $P \in \Gamma$ e $P \in Z$

Poiché ogni retta r di Z che passa per P è t.c.

o $r \subset \Gamma_Z = \Gamma \cap Z$ (capita se $r \subset \Gamma$)

o $\text{molt}_P(\Gamma_Z \cap r) = 2$, perché $P \in Z \subset T_P(\Gamma)$

$\Rightarrow$ $\boxed{P \text{ è sempre semplice per } \Gamma_Z}$