"If you've got a little tiny dream, all you have to do is think about it, work on it every day, and you'll get it." (Sebastian from The Little Mermaid)

1

Triangolazione di endomorfismi

In questo capitolo verra analizzata una classe più ampia di quella degli endomorfismi semplici: gli endomorfismi triangolabili.

Definizione 1.1. *Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$, allora f è* triangolabile *se esiste una base $\mathcal{B}$ di V_n tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è* triangolare superiore*, cioè*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.2. *Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice* triangolabile *se è simile ad una matrice triangolare superiore, cioè se esiste una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ è triangolare superiore.*

Valgono i seguenti fatti la cui dimostrazione è immediata:

- Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, dove $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$ e $\mathcal{B}$ è una generica base di V_n, allora f è triangolabile se e solo se A è triangolabile.

- Se f è semplice, allora f è triangolabile. Il viceversa non è vero. Infatti, l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ avente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

come matrice associata rispetto alla base canonica è chiaramente triangolabile, ma non è semplice poiché il polinomio caratteristico di f è $\chi_f(t) = (t-1)^2$ e $\mathbb{R}^2(1) = L(\vec{v})$, dove $\vec{v} = (1, 0)$.

Teorema 1.1. *Sia A un matrice quadrata di ordine n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *A è triangolabile.*
2. *$\chi_A(t)$, il polinomio caratteristico di A, è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Proviamo che (1) implica (2).Se A è triangolabile, allora A è simile ad una matrice triangolare superiore T. Chiaramente, gli elementi della diagonale principale di T sono gli autovalori di T e quindi di A. Pertanto, $\chi_A(t)$ è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$.
Proviamo, per induzione su n, che (2) implica (1). Per $n = 1$ la tesi è vera. Supponiamo vera la tesi per $n-1$ e proviamola per n. Poiché $\chi_A(t)$ è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$, sia $\vec{u}_1$ un autovettore per A relativo all'autovalore λ. Per il Teorema di completamento delle basi, l'insieme $\{\vec{u}_1\}$ è estendibile ad una una base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ di $\mathbb{K}^n$. Sia P la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{K}^n$ alla base $\mathcal{B}_1$, allora

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Si noti che, gli autovalori di A_1 sono autovalori di A, siccome vale che $\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)\chi_{A_1}(t)$. Per l'ipotesi induttiva, esiste una matrice invertibile Q_0 tale che $Q_0^{-1} A_1 Q_0 = T_{n-1}$, dove T_{n-1} è una matrice triangolare superiore di ordine $n-1$. Sia

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_0 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

allora vale che $Q^{-1}P^{-1}APQ$ è uguale a

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q_0^{-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q_0 & \\ 0 & & & \end{array} \right).$$

Pertanto,

$$Q^{-1}P^{-1}APQ \quad = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & T_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

e quindi A è triangolabile. $\square$

I seguenti risultati sono un'immediata conseguenza dal Teorema 1.2.

Corollario 1.1. *Se A è una matrice quadrata di ordine n a coefficienti in un campo algebricamente chiuso, allora A è triangolabile.*

Teorema 1.2. *Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *f è triangolabile.*
2. *Il polinomio caratteristico di f è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Siano $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$ e $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{B}$ è una fissata base di V_n. Chiaramente, $\chi_f(t) = \chi_A(t)$. Pertanto, segue dal Teorema 1.1 che, $\chi_f(t)$ è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$ se, e solo se, esiste una matrice invertibile P di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$ tale che $P^{-1}AP$ è triangolare superiore, cioè se f è triangolabile. $\square$

Corollario 1.2. *Se $f \in End_{\bar{\mathbb{K}}}(V_n)$, dove $\bar{\mathbb{K}}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$, allora f è triangolabile.*

Esempio 1.1. *Se $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, dove $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-y, x)$, allora*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\chi_f(t)) = t^2+1 = (t-i)(t+i)$. L'endomorfismo f non è triangolabile. Infatti, se così fosse, dovrebbe esistere una matrice reale invertibile P tale che $P^{-1}AP = T$ con T triangolare superiore. Quindi,

$$P^{-1}AP = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Cioè

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ab+cd & b^2+d^2 \\ -a^2-c^2 & -ab-cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}$$

che implica $-a^2 - c^2 = 0$ *e quindi* $a = c = 0$. *Ciò contraddice il fatto che* P *non è singolare. In realtà, vale che*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Esempio 1.2. *Triagolarizziamo la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A *è* $\chi_A(t) = t^3+3t^2+3t+1 = (t+1)^3$. *Da cui si ricava che l'autospazio relativo all'autovalore* -1 *è* $\mathbb{R}^3(-1) = \{(x, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. *Pertanto,* $\mathbb{R}^3(-1)$ *è generato dai vettori* $\vec{u} = (0, 1, -1)$ *e* $\vec{v} = (1, 0, 0)$ *(Quindi* A *non è diagonalizzabile).*

Il vettore $\vec{x} = (0, 1, 0)$ *evidentemente non appartiene a* $\mathbb{R}^3(-1)$, *quindi* $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$. *La matrice di passaggio dalla base canonica alla base* $\mathcal{B}$ *è*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}AP$ *e quindi*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(f) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è triangolare superiore.

Esempio 1.3. *Triangolarizziamo l'endomorfismo*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (3x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z, -x + \frac{9}{2}y - \frac{7}{2}z, -x + \frac{1}{2}y + \frac{9}{2}z).$$

Sia $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, *allora*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di f è $\chi_f(t) = t^3 - 12t^2 + 48t - 64 = (t-4)^3$. Allora $\mathbb{R}^3(4) = L(\vec{a})$ dove $\vec{a} = (1, 2, 0)$. L'insieme $\mathcal{B}_0 = \{\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$, dove $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ sono il primo e il terzo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$, è una base di $\mathbb{R}^3$. Se P denota la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}_0$, allora $M_{\mathcal{B}_0}(f) = P^{-1}AP$ e quindi

$$M_{\mathcal{B}_0}(f) \quad = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

La sottomatrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

di $M_{\mathcal{B}_0}(f)$ ammette $\vec{v} = (1, 2)$ come autovettore relativo all'autovalore 4. Detta Q_0 la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^2$ alla base $\{\vec{v}, \vec{w}\}$, dove $\vec{w} = (1, 0)$, vale che

$$Q_0^{-1}A_1Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sia

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

vale che $Q^{-1}P^{-1}APQ$ è uguale

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto vale che

$$Q^{-1}P^{-1}APQ = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

dove PQ è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B} = \left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_1\right\}$ in cui $\vec{a} = (1,2,0), \vec{b} = (1,0,2)$ e $\vec{e}_1 = (1,0,0)$.

> "The problem is not the problem. The problem is your attitude about the problem."
> (Captain Jack Sparrow)

2

Il polinomio minimo

Sia $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ un polinomio a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ e si consideri l'applicazione

$$P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \longmapsto a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

dove $A^0 = I_n$, $A^1 = A$, e A^i con $i > 1$ è il prodotto righe per colonne di A con sé stessa i-volte.

Similmente, se V_n è un spazio vettoriale n-dimensionale su $\mathbb{K}$ e

$$P : End_{\mathbb{K}}(V_n) \longrightarrow End_{\mathbb{K}}(V_n), f \longmapsto a_0 Id_{V_n} + a_1 f + \cdots + a_m f^m$$

Chiaramente, se $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{B}$ è una fissata base di V_n, allora $P(A) = M_{\mathcal{B}}(P(f))$.

Infine se $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$ e $R(t) = P(t)Q(t)$, allora $R(f) = P(f) \circ Q(f)$ e $R(A) = P(A)Q(A)$.

Proposizione 2.1. *Se $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$ è triangolabile, allora $\chi_f(f) = 0$.*

Dimostrazione. Proviamo l'asserto per induzione su n. Se $n = 1$, allora $f = \omega Id_{V_n}$ e quindi $\chi_f(t) = \omega - t$. Pertanto, $\chi_f(f) = \omega Id_{V_n} - f = 0$ e quindi l'asserto è vero per $n = 1$.

Supponiamo l'asserto vero per $n-1$ e proviamolo per n. Poiché f è triangolabile, per il Teorema 1.2 vale che $\chi_f(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)\cdots(\lambda_n - t)$ e quindi

$$\chi_f(f) = (\lambda_1 Id_{V_n} - f) \circ (\lambda_2 Id_{V_n} - f) \circ \cdots \circ (\lambda_n Id_{V_n} - f).$$

Inoltre, esiste una base $\mathcal{B}_n = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ di V_n tale che $V_i = L(\vec{e}_1, ...\vec{e}_i)$ per ogni $i = 1, ..., n$. Allora

$$\left\langle \vec{0} \right\rangle = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n$$

è una catena di sottospazi f-invarianti di V_n, tali che $\dim V_i = i$ per $i = 0, ..., n$. Siccome $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice triangolare superiore, gli elementi della diagonale principale di $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ sono gli autovalori di f. Quindi,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pertanto, $f(\vec{e}_n) = \vec{u} + \lambda_n \vec{e}_n$ con $\vec{u} \in V_{n-1}$.

Sia $\vec{v} \in V_n$, allora $\vec{v} = \vec{w} + \theta \vec{e}_n$ con $\vec{w} \in V_{n-1}$ e $\theta \in \mathbb{K}$, essendo $V = V_{n-1} \oplus L(\vec{e}_n)$. Se $\vec{v}' = (\lambda_n Id_{V_n} - f)(\vec{v})$, allora

$$\vec{v}' = \lambda_n \vec{v} - f(\vec{v}) = \lambda_n \vec{w} + \theta \lambda_n \vec{e}_n - f(\vec{w}) - \theta f(\vec{e}_n) = \lambda_n \vec{w} - f(\vec{w}) - \theta \vec{u}$$

Siccome $\vec{w}, \vec{u} \in V_{n-1}$ e poiché V_{n-1} è un sottospazio f-invariante, allora $\vec{v}'$ appartiene a V_{n-1}.

Posto $g = f_{|V_{n-1}}$, risulta che g è un endomorfismo di V_{n-1} triangolabile, essendolo f. Segue dall'ipotesi induttiva che

$$\chi_g(g) = (\lambda_1 Id_{V_{n-1}} - g) \circ \cdots \circ (\lambda_{n-1} Id_{V_{n-1}} - g) = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\chi_f(f)(\vec{v}) &= (\lambda_1 Id_{V_n} - f)\circ\cdots\circ(\lambda_{n-1} Id_{V_n} - f)\circ(\lambda_n Id_{V_n} - f)(\vec{v}) \\
&= (\lambda_1 Id_{V_n} - f)\circ\cdots\circ(\lambda_{n-1} Id_{V_n} - f)(\vec{v}') \\
&= (\lambda_1 Id_{V_{n-1}} - g)\circ\cdots\circ(\lambda_{n-1} Id_{V_{n-1}} - g)(\vec{v}') \\
&= \chi_g(g)(\vec{v}') = \vec{0}
\end{aligned}$$

e pertanto $\chi_f(f) = 0$. $\square$

Teorema 2.1 (Caley-Hamilton). *Se $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$, allora $\chi_f(f) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, dove $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$ e $\mathcal{B}$ è una fissata base di V_n. Allora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e quindi $A \in \mathcal{M}_n(\bar{\mathbb{K}})$, poiché $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{M}_n(\bar{\mathbb{K}})$, essendo $\bar{\mathbb{K}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$. Allora, per il Corollario 1.2, esistono $P, T \in \mathcal{M}_n(\bar{\mathbb{K}})$, P invertibile e T triangolare superiore, tali che $A = P^{-1}TP$. Pertanto $\chi_A(A) = 0$ e quindi $\chi_f(f) = 0$ essendo $\chi_f = \chi_A$. $\square$

Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$, nell'anello $(\mathbb{K}[t], +, \cdot)$ si consideri il sottoinsieme

$$\mathcal{J}_f = \{p(t) \in \mathbb{K}[t] : p(f) = 0\}.$$

Segue dal Teorema di Caley-Hamilton che $\chi_f(t) \in \mathcal{J}_f$ e quindi $\mathcal{J}_f \neq \varnothing$. Inoltre, è facile vedere che $\mathcal{J}_f$ ha la struttura di ideale rispetto alle operazioni di somma e di prodotto in $\mathbb{K}[t]$. Siccome ogni ideale di $\mathbb{K}[t]$ è principale, $\mathcal{J}_f$ ammette un unico generatore monico e di grado minimo, detto *polinomio minimo di f* e denotato con $m_f(t)$. Il polinomio minimo di una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è definito in maniera analoga.

I seguenti risultati sono essenziali nel determinare il polinomio minimo di un endomorfismo (risp. di una matrice).

Proposizione 2.2. *$m_f(t)$ divide $\chi_f(t)$.*

Dimostrazione. L'asserto è diretta conseguenza del fatto che $\chi_f(t) \in \mathcal{J}_f$ e che $\mathcal{J}_f = \langle m_f(t) \rangle$. □

Teorema 2.2. *Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$, allora lo scalare λ è un'autovalore di f se e solo se $m_f(\lambda) = 0$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $m_f(\lambda) = 0$, allora $\chi_f(\lambda) = 0$ poiché $m_f(t)$ divide $\chi_f(t)$, e quindi λ è un'autovalore di f.
Viceversa, se $\vec{v}$ è un'autovettore per f relativo all'autovalore λ, e $m_f(t) = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_0$, segue che

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= m_f(f)(\vec{v}) = \left(f^r + a_{r-1}f^{r-1} + \cdots + a_0 Id_{V_n}\right)(\vec{v}) \\
&= f^r(\vec{v}) + a_{r-1}f^{r-1}(\vec{v}) + \cdots + a_0\vec{v} \\
&= \lambda^r\vec{v} + a_{r-1}\lambda^{r-1}\vec{v} + \cdots + a_0\vec{v} = m_f(\lambda)\vec{v}.
\end{aligned}$$

Pertanto $m_f(\lambda) = 0$, siccome $\vec{v}$ è un autovettore per f. □

Esempio 2.1. *Le due seguenti matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico ma diverso polinomio minimo.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo entrambe matrici triangolari superiori, gli autovalori sono gli elementi della diagonale prinicipale. Quindi,

$$\chi_A(t) = \chi_B(t) = (t-1)^2(2-t).$$

Segue dalla Proposizione 2.2 e dal Teorema 2.2 che $m_A(t)$ e $m_B(t)$ saranno uno tra i polinomi $(t-1)(t-2)$ e $(t-1)^2(t-2)$. Siccome,

$$
\begin{aligned}
(A-I_3)(A-2I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
(B-I_3)(B-2I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

allora $m_A(t) = -\chi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$ *e* $m_B(t) = (t-1)(t-2)$.

Esempio 2.2. *Determiniamo il polinomio minimo di*

$$
A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}
$$

Il polinomio caratteristico di A *è* $\chi_A(t) = (4-t)^3$. *Poiché* $m_A(t) \mid \chi_A(t)$ *e* $m_A(4) = 0$, *segue che* $m_A(t) = (t-4)^i$ *con* $i \in \{1,2,3\}$. *Siccome* $A \neq 4I_3$ *e*

$$
(A-4I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

segue che $m_A(t) = (t-4)^2$.

Esempio 2.3. *Determiniamo il polinomio minimo di*

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}
$$

E' facile vedere che $\chi_A(t) = (t-1)\,(2-t)\,(t+1)$. *Poiché* $m_A(t) \mid \chi_A(t)$ *e* $-1, 1, 2$ *sono radici di* $m_A(t)$, *segue che*

$$
m_A(t) = -\chi_A(t) = (t-1)\,(t-2)\,(t+1)\,.
$$

> “Never say goodbye, because saying goodbye means going away, and going away means forgetting” (Peter Pan)

3

La forma canonica di Jordan

In questo capitolo V è un spazio vettoriale finitamente generato sul campo $\mathbb{K}$.

Se $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ non è semplice, è tuttavia sempre possibile determinare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ ha una forma notevole, detta *forma canonica di Jordan*. Questo risultato è vero se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, o, in particolare, se il polinomio caratteristico di f è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$.

Definizione 3.1. *Sia $m_f(t) = (t - \lambda_1)^{e_1} \cdots (t - \lambda_r)^{e_r}$ il polinomio minimo di $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$, dove $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di f. Per $i = 1, ..., r$, il sottospazio*

$$\ker(f - \lambda_i Id_{V_n})^{e_i}$$

di V è detto autospazio generalizzato relativo all'autovalore λ_i.

Esempio 3.1. *L'endomorfismo*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \longmapsto (2x, -x - 3y - z, -x + 4y + z)$$

ha come matrice associata rispetto alla base canonica la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\chi_f(t) = (2-t)(t+1)^2$*. Poiché il polinomio minimo* $m_f(t)$ *è un divisore di* $\chi_f(t)$ *è ogni autovalore è radice di* $m_f(t)$*, segue che* $m_f(t) = (t-2)(t+1)^i$*, con* $i = 1$ *o* 2*. Si noti che*

$$(A-2I_3)(A+I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ -6 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

Quindi, $(A+I_3)(A-2I_3) \neq 0$ *e pertanto* $m_f(t) = -\chi_f(t) = (t-2)(t+1)^2$.

L'autospazio (generalizzato) relativo all'autovalore 2 *è dato* $(A-2I_3)X = 0$*, dove* X *è il vettore colonna di componenti* x, y *e* z*, rispettivamente. Pertanto,*

$$\ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^3}) : \begin{cases} -x-5y-z=0 \\ -x+4y-z=0 \end{cases}$$

da cui segue che $\ker(f-2Id_{\mathbb{R}^3}) = L(\vec{a})$*, dove* $\vec{a} = (1,0,-1)$.

L'autospazio generalizzato all'autovalore di -1 *è dato* $(A+I_3)^2 X = 0$*, dove*

$$(A+I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})^2 : x = 0.$$

Pertanto, $\ker(f+Id_{\mathbb{R}^3})^2 = L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$*, dove* $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ *e* $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Poiché $\{\vec{a}, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *è una base di* $\mathbb{R}^3$*, segue che*

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f-2Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f+Id_{\mathbb{R}^3})^2.$$

Questa decomposizione di $\mathbb{R}^3$ *è in realta un fatto di carattere generale, come mostrato più avanti dal Teorema di Decomposizione Primaria (Teorema 3.1).*

Lemma 3.1. *Sia* $f \in End_{\mathbb{K}}(V_n)$ *con polinomio minimo* $m_f(t) = p(t)q(t)$*, dove* $p(t) = (t-\lambda_1)^{e_1}$*,* $q(t) = (t-\lambda_2)^{e_2} \cdots (t-\lambda_r)^{e_r}$*, con* $\lambda_1, ..., \lambda_r$ *gli autovalori* *distinti di f, ed $e_1, ..., e_r$ interi positivi. Allora $V = V_1 \oplus W$, dove $V_1 = \ker(p(f))$ e $W = \ker(q(f))$.*

Dimostrazione. Poiché i polinomi $p(t)$ e $q(t)$ non hanno fattori a comune, esistono $a(t), b(t) \in \mathbb{K}[t]$ tali che $a(t)p(t) + b(t)q(t) = 1$. Sia $\vec{x} \in V$, allora

$$\vec{x} = Id_V(\vec{x}) = (a(f) \circ p(f) + b(f) \circ q(f))(\vec{x}) = a(f)(p(f)(\vec{x})) + b(f)(q(f)(\vec{x})).$$

Siccome

$$q(f)(a(f)(p(f)(\vec{x}))) = a(f)(q(f)(p(f)(\vec{x}))) = a(f)(m_f(f)(\vec{x})) = \vec{0},$$

segue che $a(f)(p(f)(\vec{x})) \in W$, essendo $W = \ker(q(f))$. Analogamente, si prova che $b(f)(q(f)(\vec{x}) \in V_1$. Pertanto, $V = V_1 + W$.

Ora siano $\vec{v} \in V_1$ e $\vec{w} \in W$ tali che $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, allora

$$p(f)(\vec{v}) + p(f)(\vec{w}) = p(f)(\vec{v} + \vec{w}) = p(f)(\vec{0}) = \vec{0}.$$

D'altra parte, $\vec{v} \in V_1$ e $V_1 = \ker(p(f))$ implicano $p(f)(\vec{v}) = \vec{0}$. Quindi $p(f)(\vec{w}) = \vec{0}$ che implica

$$\begin{aligned} \vec{w} &= Id_V(\vec{w}) = (a(f) \circ p(f) + b(f) \circ q(f))(\vec{w}) \\ &= a(f)(p(f)(\vec{w})) + b(f)(q(f)(\vec{w})) = b(f)(q(f)(\vec{w})) = \vec{0}, \end{aligned}$$

poiché $\vec{w} \in W$ e $W = \ker(q(f))$. Segue che anche $\vec{v} = \vec{0}$, essendo $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Pertanto, $V = V_1 \oplus W$. $\square$

Corollario 3.1. *$W = Im(p(f))$.*

Dimostrazione. Sia $\vec{v} \in V$, allora $q(f)\,(p(f)(\vec{v})) = \vec{0}$ e pertanto $Im(p(f)) \subseteq W$. Quindi, $W = Im(p(f))$ per $V = V_1 \oplus W$ e per il Teorema del Rango. $\square$

Teorema 3.1 (**Decomposizione Primaria**). *Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ con con polinomio minimo*

$$m_f(t) = (t - \lambda_1)^{e_1} \cdots (t - \lambda_r)^{e_r},$$

dove $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di f, ed $e_1, ..., e_r$ sono interi positivi. Posto $V_i = \ker((f - \lambda_i Id_{V_i})^{e_i})$, $i = 1, ..., r$, allora

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. (Per induzione su r). Se $r = 1$, l'asserto è banalmente vero. Supponiamolo vero per $r - 1$ e proviamolo per r. Dal Lemma 3.1 segue che $V = V_1 \oplus W$, dove $V_1 = \ker((f - \lambda_1 Id_V)^{e_1})$, $W = \ker(q(f))$ e dove $q(t) = (t - \lambda_1)^{e_2} \cdots (t - \lambda_r)^{e_r}$.

Proviamo che W è f-invariante. Sia $\vec{w} \in W$, per il Corollario 3.1 esiste $\vec{v} \in V$ tale che $\vec{w} = p(f)(\vec{v})$. Quindi, $f(\vec{w}) = (f \circ p(f))(\vec{v}) = (p(f) \circ f)(\vec{v}) = p(f)(f(\vec{v}))$ e pertanto $f(\vec{w}) \in Im(p(f)) = W$.

Posto $g = f_{|W}$, vale che $g \in End_{\mathbb{K}}(W)$ siccome W é f-invariante. Inoltre, vale che $q(g)(W) = \left\{\vec{0}\right\}$ poiché $W = \ker(q(f))$. Cioé $q(g) = 0$ e quindi $m_g(t) \mid q(t)$.

Se $m_g(t)$ è un divisore proprio di $q(t)$, il polinomio $z(t) = m_g(t)p(t)$ è tale che $0 < \deg z(t) < \deg m_f(t)$. Si consideri l'endomorfismo $z(f) = m_g(f) \circ p(f)$ di V. Sia $\vec{v} \in V$, allora esistono (unici) $\vec{x} \in V_1$ e $\vec{y} \in W$ tali che $\vec{v} = \vec{x} + \vec{y}$ e quindi

$$\begin{aligned} z(f)(\vec{v}) &= m_g(f)(p(f)(\vec{x})) + m_g(f)(p(f)(\vec{y})) \\ &= m_g(f)(p(f)(\vec{x})) + p(f)(m_g(f)(\vec{y})) \\ &= m_g(f)(p(f)(\vec{x})) + p(f)(m_g(g)(\vec{y})) = \vec{0} \end{aligned}$$

poiché $V_1 = \ker((f - \lambda_1 Id_V)^{e_1}) = \ker(p(f))$ e per come é definito l'endomorfismo g. Quindi $z(f) = 0$ e pertanto $z(t) \in \mathcal{J}_f$. Allora $m_f(t) \mid z(t)$, ma ciò è assurdo in quanto $0 < \deg z(t) < \deg m_f(t)$. Pertanto,

$$m_g(t) = q(t) = (t - \lambda_1)^{e_2} \cdots (t - \lambda_r)^{e_r}$$

da cui segue $W = V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, dove $V_i = \ker(g - \lambda_i Id_W)^{e_i}$, $i > 1$, per l'ipotesi induttiva.

Rimane da provare che $\ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i} = \ker(g - \lambda_i Id_W)^{e_i}$ per $i > 1$.

Sia $\vec{a} \in \ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}$, $i > 1$, allora $(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}(\vec{a}) = \vec{0}$ che a sua volta implica $\prod_{i=2}^{r}(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}(\vec{a}) = \vec{0}$. Cioè $q(f)(\vec{a}) = \vec{0}$. Pertanto $\vec{a} \in W$ e quindi $\ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i} \subseteq W$. Da ciò segue che $\ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i} = \ker(g - \lambda_i Id_W)^{e_i}$, essendo $g = f_{|W}$. Quindi, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, dove $V_i = \ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}$, $i = 1, ..., r$. $\square$

La decomposizione (3.1) è detta *Decomposizione Primaria di V rispetto ad f*, i sottospazi $V_1, ..., V_r$ sono detti *componenti primarie.*

Corollario 3.2. *Le componenti primarie sono f-invarianti.*

Dimostrazione. Se $\vec{x} \in \ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}$, allora $(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}(\vec{x}) = \vec{0}$ e quindi

$$(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}(f(\vec{x})) = f((f - \lambda_i Id_V)^{e_i}(\vec{x})) = \vec{0}.$$

Pertanto $f(\vec{x}) \in \ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}$ e quindi $\ker(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}$ è f-invariante $\square$

Sia $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$ è la decomosizione primaria di V rispetto a $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Per ogni $i = 1, ..., r$, posto $f_i = f_{|V_i}$, vale che $f_i \in End_{\mathbb{K}}(V_i)$ poiché le componenti primarie sono f-invarianti. Se $\mathcal{B}_i$ è una base di V_i, $i = 1, ..., r$, allora $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ è una base di V e vale che

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

dove $A_i = M_{\mathcal{B}_i}(f_i)$, $i = 1, ..., r$.

Proposizione 3.1. *Valgono i seguenti fatti:*

1. $m_f(t) = m_{f_1}(t) \cdots m_{f_r}(t)$ *e per ogni* $i = 1, ..., r$ *risulta* $m_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{e_i}$.

2. *Per ogni* $i = 1, ..., r$ *vale che* $\dim(V_i)$ *è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore* λ_i.

Dimostrazione. Sia $\vec{x} \in V_i$, $i = 1, ..., r$, allora $(f - \lambda_i Id_V)^{e_i}(\vec{x}) = \vec{0}$. Pertanto, $(f_i - \lambda_i Id_{V_i})^{e_i}(\vec{x}) = \vec{0}$ e quindi $(f_i - \lambda_i Id_{V_i})^{e_i} = 0$. Ciò implica che $(t - \lambda_i)^{e_i} \in \mathcal{J}_{f_i}$. Allora $m_{f_i}(t) \mid (t - \lambda_i)^{e_i}$ per ogni $i = 1, .., r$ e quindi $\prod_{i=1}^r m_{f_i}(t) \mid m_f(t)$.
Sia $\vec{v} \in V$, vale che $\vec{v} = \sum_{j=1}^r \vec{v}_j$ con $\vec{v}_j \in V_j$ (in modo unico), essendo $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Allora

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^r m_{f_i}(f)(\vec{v}) &= \prod_{i=1}^r m_{f_i}(f) \left(\sum_{j=1}^r \vec{v}_j \right) = \sum_{j=1}^r \left(\prod_{i=1}^r m_{f_i}(f) \right) (\vec{v}_j) \\
&= \sum_{j=1}^r \left(\prod_{i=1, i \neq j}^r m_{f_i}(f) \right) (m_{f_j}(f)(\vec{v}_j)) \\
&= \sum_{j=1}^r \left(\prod_{i=1, i \neq j}^r m_{f_i}(f) \right) (m_{f_j}(f_j)(\vec{v}_j)) \\
&= \sum_{j=1}^r \left(\prod_{i=1, i \neq j}^r m_{f_i}(f) \right) \left(\vec{0}\right) = \vec{0}
\end{aligned}$$

Allora $\prod_{i=1}^r m_{f_i}(f) = 0$ e quindi $\prod_{i=1}^r m_{f_i}(t) \in \mathcal{J}_f$. Pertanto $m_f(t) \mid \prod_{i=1}^r m_{f_i}(t)$. Quindi, $m_f(t) = \prod_{i=1}^r m_{f_i}(t)$ e $m_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{e_i}$ per ogni $i = 1, .., r$, che è l'asserto (1).
Dalla Proposizione 2.2 e dal Teorema 2.2 segue $m_{f_i}(t) \mid \chi_{f_i}(t)$ e $m_{f_i}(t)$ e $\chi_{f_i}(t)$ hanno le stesse radici (con molteplicità eventualmente diversa). Pertanto, $\chi_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{a_i}$. Infine, calcolando $\chi_f(t)$ con la Regola di Laplace si ha che $\chi_f(t) = \prod_{i=1}^r \chi_{f_i}(t)$ e quindi $\dim V_i = \deg \chi_{f_i}(t) = m.a.(\lambda_i)$, cioè vale (2). $\square$

Esempio 3.2. *Nell'Esempio 3.1,* $\mathbb{R}^3 = \ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3})^2$ *è la decomposizione primaria. Denotata con* $\mathcal{B}$ *la base* $\{\vec{a}, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$*, segue che* $f(\vec{a}) = 2\vec{a}$,

$f(\vec{e}_2) = (0,-3,4) = -3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $f(\vec{e}_3) = (0,-1,1) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, e quindi

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.3. *La matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dell'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x,y,z) \longmapsto (-x+4y+4z, -y, -x+7y+3z)$ è*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $\chi_f(t) = -(t-1)^2(t+1)$. Poiché ± 1 devono entrambe essere radici di $m_f(t)$ e quest'ultimo deve dividere $\chi_f(t)$, segue che $m_f(t) = (t-1)^h(t+1)$, con $h = 1$ o 2. Risulta che

$$(A - I_3)(A + I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

quindi $(A + I_3)(A - I_3) \neq 0$ e pertanto $m_f(t) = (t-1)^2(t+1) = -\chi_f(t)$.

Determiniamo $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})^2$ che è dato da

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\ker(f - Id_{\mathbb{R}^3})^2 = \{(x,0,z) : x, z \in \mathbb{R}\} = L(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$, con $\vec{e}_1 = (1,0,0)$ e $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Infine, è facile vedere che $\ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}) = L(\vec{s})$, dove $\vec{s} = (-3,-1,1)$.

Denotata con $\mathcal{B}$ la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{s}\}$, la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$ è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definizione 3.2. *La matrice*

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

è detta blocco di Jordan di ordine n.

Teorema 3.2. *Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ con polinomio minimo $m_f(t) = (t - \lambda)^k$, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che*

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_h}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Sia $g = f - \lambda Id_V$.

1. Vale che

$$\left\{\vec{0}\right\} = \ker g^0 \subseteq \ker g^1 \subseteq \ker g^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker g^{k-1} \subseteq \ker g^k = V \tag{3.4}$$

Poiché $m_f(t) = (t-\lambda)^k$ e $\chi_f(t) = (\lambda - t)^n$, segue che $m_g(t) = t^k$ e $\chi_g(t) = (-t)^n$. Pertanto $g^k = 0$ e quindi $V = \ker g^k$. Inoltre, se $\vec{v} \in \ker g^h$ segue che $g^{h+1}(\vec{v}) = g(g^h(\vec{v})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$ e quindi $\vec{v} \in \ker g^{h+1}$, che a sua volta implica la catena di sottospazi (3.4).

2. Sia $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x\}$ una base di $\ker g^h$ estesa ad una base $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_y\}$ di $\ker g^{h+1}$ e quindi ad una base

$$\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_y, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_z\}$$

di $\ker g^{h+2}$, allora

$$\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, g(\vec{w}_1), ..., g(\vec{w}_z)\}$$

è un sottoinisieme linearmente indipendente di $\ker g^{h+1}$.

Si noti che per ogni $j = 1, ..., z$, risulta $\vec{w}_j \in \ker g^{h+2}$ e quindi $\vec{0} = g^{h+2}(\vec{w}_j) = g^{h+1}(g(\vec{w}_j))$, da cui segue che $g(\vec{w}_j) \in \ker g^{h+1}$. Pertanto,

$$\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, g(\vec{w}_1), ..., g(\vec{w}_z)\} \subset \ker g^{h+1}.$$

Supponiamo per assurdo che esistano $\alpha_1, ..., \alpha_x, \beta_1, ..., \beta_z \in \mathbb{K}$, non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{x} \alpha_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^{z} \beta_j g(\vec{w}_j) = \vec{0}.$$

Poiché $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x\}$ è lineamente indipendente, almeno uno tra $\beta_1, ..., \beta_z$ è non nullo. Allora

$$\sum_{j=1}^{z} \beta_j g(\vec{w}_j) = -\sum_{i=1}^{x} \alpha_i \vec{u}_i \in \ker g^h$$

e quindi

$$\vec{0} = g^h\left(\sum_{j=1}^{z} \beta_j g(\vec{w}_j)\right) = g^{h+1}\left(\sum_{j=1}^{z} \beta_j \vec{w}_j\right).$$

Pertanto, $\sum_{j=1}^{z} \beta_j \vec{w}_j \in \ker g^{h+1}$. Inoltre, $\sum_{j=1}^{z} \beta_j \vec{w}_j \neq \vec{0}$, essendo almeno uno tra $\beta_1, ..., \beta_z$ è non nullo. Quindi, $\sum_{j=1}^{z} \beta_j \vec{w}_j$ è combinazione lineare di della base $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_y\}$ di $\ker g^{h+1}$ e quindi $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_y, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_z\}$ è un sottoinsieme linearmente dipendente di $\ker g^{h+1}$ e quindi di $\ker g^{h+2}$. Ma ciò è assurdo, essendo $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_x, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_y, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_z\}$ una base di $\ker g^{h+2}$.

3. Esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_1}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_h}(0) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Tenendo presente la catena (3.4), sia $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{r_1}\}$ una base di $\ker g$, e la si estenda ad una base

$$\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_1+1}, ..., \vec{v}_{r_2}\}$$

di $\ker g^2$ e procedendo così fino ad ottenere una base

$$\mathcal{B}_0 = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{r_1}, \vec{v}_{r_1+1}, ..., \vec{v}_{r_2}, \vec{v}_{r_2+1}, ..., \vec{v}_{r_k}\}$$

di $\ker g^k = V$. Si denotino con $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n_1}$ gli elementi $\vec{v}_{r_{k-1}+1}, ..., \vec{v}_{r_k}$ di $\mathcal{B}_0 \cap \ker g^k - \ker g^{k-1}$. Quindi,

$$L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n_1}) = L(\vec{v}_{r_{k-1}+1}, ..., \vec{v}_{r_k}).$$

Sia $\vec{b}_i = g(\vec{a}_i)$, $i = 1, ..., n_1$, dal punto (2) segue che $\left\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n_1}, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n_1}\right\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente. Si estenda la lista dei $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n_1}$ a $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n_2}$ in modo tale che

$$\left\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n_1}, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n_2}\right\}$$

sia una base di $\ker g^{k-1}$. Quindi

$$L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n_1}, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n_2}) = L(\vec{v}_{r_{k-2}+1}, ..., \vec{v}_{r_{k-1}}, \vec{v}_{r_{k-1}+1}, ..., \vec{v}_{r_k}).$$

Si calcolino $\vec{c}_j = g(\vec{b}_j)$ per ogni $j = 1, ...n_2$ e si estenda l'insieme linearmente indipendente $\{\vec{c}_1, ..., \vec{c}_{n_2}\}$ ad una base $\{\vec{c}_1, ...\vec{c}_{n_2}, \vec{c}_{n_2+1}, ..., \vec{c}_{n_3}\}$ di $\ker g^{k-2}$. Quindi $L(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n_1}, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n_2}, \vec{c}_1, ..., \vec{c}_{n_3})$ è uguale a

$$L(\vec{v}_{r_{k-3}+1}, ..., \vec{v}_{r_{k-2}}, \vec{v}_{r_{k-2}+1}, ..., \vec{v}_{r_{k-1}}, \vec{v}_{r_{k-1}+1}, ..., \vec{v}_{r_k}).$$

Alla fine del procedimento (dopo k passi) si ottiene una base $\mathcal{B}$ i cui elementi sono elencati come segue:

$$\begin{array}{lllllllll}
\vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_{n_1} & & & & & & \\
\vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_{n_1} & \vec{b}_{n_1+1} & \dots & \vec{b}_{n_2} & & & \\
\vec{c}_1 & \cdots & \vec{c}_{n_1} & \vec{c}_{n_1+1} & \dots & \vec{c}_{n_2} & \vec{c}_{n_2+1} & \dots & \vec{c}_{n_3} \\
\vdots & & & & & & & & \\
\vec{z}_1 & \cdots & \vec{z}_{n_1} & \vec{z}_{n_1+1} & \dots & \vec{z}_{n_2} & \vec{z}_{n_2+1} & \dots & \vec{z}_{n_3} \quad \dots \quad \vec{z}_{n_k}.
\end{array}$$

Ora riordinando gli elementi della base $\mathcal{B}$ (secondo l'ordine delle colonne, dal basso verso l'alto e poi da sinistra verso destra) si ottiene

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{z}_1, ..., \vec{c}_1, \vec{b}_1, \vec{a}_1, \vec{z}_2, ..., \vec{c}_2, \vec{b}_2, \vec{a}_2, \dots \vec{z}_{n_k}\right\}.$$

Poiché $g(a_i) = b_i$, $g(b_i) = c_i$,....,$g(z_i) = 0$ risulta che $M_{\mathcal{B}}(g)$ è come in (3.5).

4. $M_{\mathcal{B}}(f)$ è uguale a (3.3). Infatti, basta notare che $f = g + \lambda Id_V$ e quindi $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g) + \lambda I_n$.

$\square$

Come vedremo, i precedenti risultati permettono di *ridurre in forma canonica di Jordan* la matrice di un endomorfismo. Una matrice quadrata a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ si dice in *forma canonica di Jordan* se è una matrice diagonale a

blocchi della forma
$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{m-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_m \end{pmatrix}$$
con $\mathbf{J}_1, ..., \mathbf{J}_m$ blocchi di Jordan.

Esempio 3.4. *Sia*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
il cui polinomio caratteristico è $\chi_A(t) = (2-t)^5$. *Il polinomio minimo è quindi della forma* $m_A(t) = (t-2)^i$, *per qualche intero* i *compreso tra* 1 *e* 5. *Poiché* $A \neq 2I_5$ *e*

$$(A-2I_5)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I_5)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

risulta $m_A(t) = (t-2)^3$. *Sia* $g \in End(\mathbb{R}^5)$ *tale che la matrice associata a* g *rispetto alla base canonica sia* $N = A - 2I_5$.

Allora

$$\ker g = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) : X_1 + X_2 = X_1 - X_3 = X_4 + X_5 = 0\}$$

e quindi $\ker g = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ *con* $\vec{v}_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$ *e* $\vec{v}_2 = (0, 0, 0, 1, 1)$.

$$\ker g^2 = \{(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) : X_2 + X_3 = 0\} = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4),$$

dove $\vec{e}_1, \vec{e}_4$ *sono il primo e il quarto vettore della base canonica di* $\mathbb{R}^5$. *Infine,* $\ker g^3 = \mathbb{R}^5$ *una cui base è* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_2\}$.

Sia $\vec{a}_1 = \vec{e}_2$, *allora* $\vec{b}_1 = g(\vec{e}_2) = \vec{e}_1$ *e* $\vec{b}_2 = \vec{e}_4$. *Ora sia* $\vec{c}_1 = g(\vec{b}_1) = (1, -1, 1, -1, 1)$ *e* $\vec{c}_2 = g(\vec{b}_2) = (0, 0, 0, -1, 1)$, *ottenenendo la seguente tavola*

$$\begin{array}{ll} \vec{a}_1 & \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \\ \vec{c}_1 & \vec{c}_2 \end{array}$$

Sia quindi la base $\mathcal{B} = \left\{\vec{c}_1, \vec{b}_1, \vec{a}_1, \vec{c}_2, \vec{b}_2\right\}$, *la matrice di passaggio dalla base canonica a quest'ultima risulta*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, $M_{\mathcal{B}}(g) = P^{-1}NP$ *è data da*

$$
\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}}(g) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Infine,

$$
M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g) + 2I_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

che è la forma canonica di Jordan di A.

Teorema 3.3 (Riduzione a Forma Canonica di Jordan). *Sia $f \in End_{\mathbb{K}}(V)$ tale che $\chi_f(t)$ è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è in forma canonica di Jordan. Tale forma é unica a meno di una permutazione dei blocchi di Jordan che la compongono.*

Dimostrazione. Poiché $\chi_f(t)$ è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$, e $m_f(t)$ divide $\chi_f(t)$, segue che

$$m_f(t) = (t-\lambda_1)^{e_1} \cdots (t-\lambda_r)^{e_r},$$

dove $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sono gli autovalori distinti di f, ed $e_1, ..., e_r$ sono interi positivi. Sia $V_i = \ker((f - \lambda_i Id_V)^{e_i})$, $i = 1, ..., r$, allora per il Teorema di Decomposizione Primaria vale che $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$. Quindi, se $\mathcal{B}_i$ è una base di V_i per $i = 1, ..., r$, allora $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ è una base di V e

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{pmatrix}$$

dove $A_i = M_{\mathcal{B}_i}(f_{|V_i})$, $i = 1, ..., r$, è una matrice quadrata di ordine la molteplicità algebrica m_i dell'autovalore λ_i per la Proposizione 3.1(2). Inoltre, Poiché $m_{f_{|V_i}}(t) = (t - \lambda_i)^{e_i}$, $i = 1, ..., r$ per la Proposizione 3.1(1), segue dal Teorema 3.2 che esiste una base $\mathcal{B}'_i$ di V_i tale che

$$M_{\mathcal{B}'_i}(f_{|V_i}) = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_{h_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Quindi, $\mathcal{B}' = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}'_i$, è chiaramente una base di V e $M_{\mathcal{B}'}(f)$ è in forma canonica di Jordan.

Posto $A = M_{\mathcal{B}'}(f)$, per provare che tale forma di Jordan è unica a meno di una permutazione dei blocchi di Jordan che compongono, è sufficiente provare che il numero $\rho(f, \lambda, h)$ dei blocchi di Jordan di ordine h relativi al generico autovalore λ presenti in A è dato da

$$\rho(f, \lambda, h) = rg(f - \lambda Id_V)^{h-1} - 2rg(f - \lambda Id_V)^h + rg(f - \lambda Id_V)^{h+1},$$

che è quindi indipendente dalla base in cui f è rappresentata in forma canonica di Jordan.

Per ogni intero $j \geq 1$, vale che $rg(f - \lambda Id_V)^j = rg(A - \lambda I_n)^j$, dove $n = \dim V$. Denotati con $J_1, ..., J_m$ i blocchi di Jordan che appaiono in A, e indicati con $a_1, ..., a_m$ i rispettivi ordini, senza perdere di generalità, possiamo supporre che quelli relativi all'autovalore λ siano i primi k. Quindi, $rg(f - \lambda Id_V)^j$ è uguale a

$$rg \begin{pmatrix} (J_1 - \lambda I_{a_1})^j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (J_2 - \lambda I_{a_2})^j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \left(J_{m-1} - \lambda I_{a_{m-1}}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (J_m - \lambda I_{a_m})^j \end{pmatrix}$$

Pertanto,

$$rg(f - \lambda Id_V)^j = \sum_{i=1}^{m} rg\,(J_i - \lambda I_{a_i})^j$$

Se $i > k$, allora $J_i - \lambda I_{a_i}$ è una matrice triangolare superiore con tutti gli elementi della diagonale principale diversi da 0, e quindi $rg\,(J_i - \lambda I_{a_i})^j = a_i$. Se invece $i \leq k$, la matrice $J_i - \lambda I_{a_i}$ è un blocco di Jordan relativo all'autovalore 0 e quindi è facile vedere che $rg\,(J_i - \lambda I_{a_i})^j = \max\{a_i - j, 0\}$. Quindi,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} rg\,(J_i - \lambda I_{a_i})^j &= \sum_{i=1}^{k} rg\,(J_i - \lambda I_{a_i})^j + \sum_{i=k+1}^{m} rg\,(J_i - \lambda I_{a_i})^j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \max\{a_i - j, 0\} + \sum_{i=k+1}^{m} a_i \end{aligned}$$

Pertanto, posto $R = rg(f - \lambda Id_V)^{h-1} - 2rg(f - \lambda Id_V)^h + rg(f - \lambda Id_V)^{h+1}$ vale che

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{m} rg\left(J_i - \lambda I_{a_i}\right)^{h-1} - 2\sum_{i=1}^{m} rg\left(J_i - \lambda I_{a_i}\right)^{h} + \sum_{i=1}^{m} rg\left(J_i - \lambda I_{a_i}\right)^{h-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \max\{a_i - h + 1, 0\} + \sum_{i=k+1}^{m} a_i - 2\sum_{i=1}^{k} \max\{a_i - h, 0\} - 2\sum_{i=k+1}^{m} a_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \max\{a_i - h - 1, 0\} + \sum_{i=k+1}^{m} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\max\{a_i - h + 1, 0\} - 2\max\{a_i - h, 0\} + \max\{a_i - h - 1, 0\}\right) \end{aligned}$$

Sia $M_i = \max\{a_i - h + 1, 0\} - 2\max\{a_i - h, 0\} + \max\{a_i - h - 1, 0\}$. Se $h+1 \geq a_i$, allora $M_i = 0$. Se invece $h = a_i$, allora $M_i = 1 - 0 - 0 = 1$. Infine, se $h < a_i$ vale che $M_i = a_i - h + 1 - 2(a_i - h) + a_i - h - 1 = 0$. Pertanto, $h = a_i$ e vale che $R = k$. Quindi,

$$\rho(f, \lambda, h) = rg(f - \lambda Id_V)^{h-1} - 2rg(f - \lambda Id_V)^h + rg(f - \lambda Id_V)^{h+1}. \tag{3.6}$$

$\square$

Si noti che (3.6) è particolarmente utile per determinare il numero dei blocchi di Jordan di ordine h relativi all'autovalore λ di f.

I seguenti corollari sono un'immediata conseguenza del Teorema 3.3.

Corollario 3.3. *Sia $f \in End_{\bar{\mathbb{K}}}(V)$, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è in forma canonica di Jordan. Tale forma é unica a meno di una permutazione dei blocchi di Jordan che la compongono.*

Corollario 3.4. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che il $\chi_A(t)$ è interamente decomponibile su $\mathbb{K}$ (In particolare, ciò è vero se $A \in \mathcal{M}_n(\bar{\mathbb{K}})$), allora esiste una matrice invertibile D di ordine n, tale che $D^{-1}AD$ è in forma canonica di Jordan. Tale forma é unica a meno di una permutazione dei blocchi di Jordan che compongono $D^{-1}AD$.*

Esempio 3.5. *Sia consideri la matrice a coefficienti reali*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $\chi_A(t) = t^3(t-1)$, *e come conseguenza del Teorema di Decomposizione Primaria segue che* A *è simile ad una matrice diagonale con blocchi di ordine* 3 *e* 1. *Determiniamo il numero dei blocchi di Jordan di lunghezza* 1 *relativi all'autovalore* 0. *Quindi,*

$$\rho(A,0,1) = rg(A^0) - 2rg(A) + rg(A^2) = 4 - 6 + rg(A^2).$$

Siccome

$$rg(A^2) = rg \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

vale che $\rho(A,0,1) = 0$. *Quindi la forma canonica di Jordan è composta da un unico blocco di ordine* 3 *relativo all'autovalore* 0 *ed un unico blocco di ordine* 1 *relativo all'autovalore* 1. *Pertanto* A *è simile alla matrice*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Infatti, $m_A(t) = t^i(t-1)$, *con* $i = 1$ *o* 2 *o* 3.

Poiché

$$A^2(A-I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora $m_A(t) = \chi_A(t) = t^3(t-1)$. *Quindi* $\mathbb{R}^4 = \ker(A^3) \oplus \ker(A-I)$.

Semplici calcoli mostrano che $\ker(A-I) = L(\vec{w})$, *dove* $\vec{w} = (1,1,0,1)$, *e che* $\ker(A^3) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, *con* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *i primi* 3 *vettori della base canonica di* $\mathbb{R}^4$. *Inoltre è facile vedere che* $\ker(A) = L(\vec{e}_2)$, $\ker(A^2) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. *Pertanto,*

$$\ker(A) = L(\vec{e}_2) \subset \ker(A^2) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \subset \ker(A^3) = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Sia $\vec{a}_1 = \vec{e}_3$, *allora* $\vec{a}_1 \in \ker(A^3) - \ker(A^2)$. *Ora siano* $\vec{b}_1 = A\vec{a}_1 = \vec{e}_1$ *e* $\vec{c}_1 = A\vec{b}_1 = \vec{e}_2$ *e sia* P *la matrice di passaggio dalla base canonica di* $\mathbb{R}^4$ *alla base* $\{\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{w}\}$, *allora*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $P^{-1}AP = J$. *Infatti,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3.6. *Ridurre in forma canonica di Jordan la matrice dell'endomorfismo*

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (x,y) \longmapsto (ix - y, x + (i-2)y)$$

Siano $\mathcal{B}_c$ *la base canonica di* $\mathbb{C}^2$ *e* $A = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, *allora*

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i-2 \end{pmatrix}$$

e $\chi_f(t) = t^2 + (2-2i)\,t - 2i = (t-(i-1))^2$. *Poiché* $A \neq (i-1)I_2$, *risulta* $m_f(t) = \chi_f(t)$. *Siano* $g = f - (i-1)Id_{\mathbb{C}^2}$ *e* $L = M_{\mathcal{B}_c}(g)$, *allora*

$$L = A - (i-1)I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\ker g = L(\vec{v})$, *dove* $\vec{v} = (1,1)$, *e* $\ker g^2 = \mathbb{C}^2$. *Allora* $\ker g = L(\vec{v}) \subset \ker g^2 = L(\vec{v}, \vec{e}_1)$. *Poiché* $\vec{v} = g(\vec{e}_1)$, *la matrice* P *di passaggio dalla base* $\mathcal{B}_c$ *alla base* $\mathcal{B} = \{\vec{v}, \vec{e}_1\}$ *è*

$$P^{-1}LP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}$$

è la forma canonica di Jordan cercata.

Esempio 3.7. *Si consideri la matrice a coefficienti reali*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

allora $\chi_A(t) = t^4 - 2t^2 + 1 = (t-1)^2\,(t+1)^2$. *Poiché*

$$\rho(A,1,1) = rg(A - I_4)^0 - 2rg(A - I_4) + rg((A - I_4)^2) = 4 - 6 + rg((A - I_4)^2)$$

e siccome

$$(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 & -4 \\ -32 & -16 & 12 & 12 \\ -28 & -20 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2*, segue che* $\rho(A,1,1) = 0$ *e quindi* $\rho(A,1,2) = 1$*. Poiché*

$$\rho(A,-1,1) = rg(A+I_4)^0 - 2rg(A+I_4) + rg((A+I_4)^2) = 4 - 6 + rg((A-I_4)^2)$$

e siccome

$$(A+I_4)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -4 & -4 \\ 12 & 8 & -4 & -4 \\ 60 & 40 & -20 & -24 \\ -12 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ha rango 2*, sia ha* $\rho(A,-1,1) = 0$ *e quindi* $\rho(A,-1,2) = 1$*. Pertanto,* A *è simile a la matrice di Jordan*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Infatti, $m_A(t) = (t-1)^i\,(t+1)^j$*, con* $i,j = 1,2$*. Poiché valgono*

$$\begin{aligned} (A-I_4)^2(A+I_4) &= \begin{pmatrix} -20 & -12 & 8 & 8 \\ 20 & 12 & -8 & -8 \\ -20 & -12 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (A-I_4)(A+I_4)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & -4 & -4 \\ -12 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

segue che $m_A(t) = \chi_A(t) = (t-1)^2 (t+1)^2$. *Pertanto, per il Teorema di Decomposizione Primaria risulta*

$$\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4)^2 \oplus \ker(A + I_4)^2.$$

Allora

$$\ker(A - I_4)^2 : \begin{cases} 12x + 4y - 4z - 4t = 0 \\ -32x - 16y + 12z + 12t = 0 \\ -28x - 20y + 12z + 12t = 0 \end{cases}$$

Quindi $\ker(A - I_4)^2 = \{(t + z, t + z, 4z, 4t) : t, z \in \mathbb{R}\}$ *e pertanto* $\ker(A - I_4)^2 = L\ (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, *dove* $\vec{u}_1 = (1, 1, 0, 4)$ *e* $\vec{u}_2 = (1, 1, 4, 0)$.

Infine,

$$\ker(A + I_4)^2 : \begin{cases} 12x - 4t + 8y - 4z = 0 \\ 60x - 24t + 40y - 20z = 0 \end{cases}$$

quindi $\ker(A + I_4)^2 = \{(z - 2y, 3y, 3z, 0) : y, z \in \mathbb{R}\}$ *e pertanto* $\ker(A + I_4)^2 = L\ (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, *dove* $\vec{w}_1 = (1, 0, 3, 0)$ *e* $\vec{w}_2 = (-2, 3, 0, 0)$.

Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(A - I_4)\vec{u}_1, \vec{u}_1, (A + I_4)\vec{w}_1, \vec{w}_1\}$ *di* $\mathbb{R}^4$, *la matrice di passaggio dalla base canonica a* $\mathcal{B}$ *è*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 12 & 8 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $P^{-1}AP = J$, *dove* J *è definita in (3.8).*